



jet.com.ua

ВОСТОЧНО-ЕВРОПЕЙСКИЙ ЖУРНАЛ ПЕРЕДОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

ISSN 1729-3774

информационные технологии

інформаційні технології

information
technologies

новая экономика

нова економіка

new economy

промышленные технологии

промислові технології

industrial
applications

1/6(37)
2009

УДК 519.216

АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ЛИНЕЙНОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА БАЗЕ АППАРАТА КАНОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

И. П. Атаманюк

Кандидат технических наук, доцент
Кафедра высшей и прикладной математики
Николаевский государственный аграрный университет
54010, г. Николаев ул. Парижской коммуны, 9
Контактный тел.: 8098 7971234
e-mail: atamanyuk_igor@mail.ru

Осуществлен анализ качества линейной экстраполяции скалярных случайных процессов при различном объеме информации на базе аппарата канонических разложений. В частности получен вывод о том, что переход от скалярного случайного процесса со значительным последствием к векторному марковскому процессу дает квазиоптимальный результат решения задачи фильтрации-экстраполяции методом Калмана

Широкий круг задач управления связан с необходимостью предсказания будущего состояния объекта контроля по его настоящему и прошлому. В случае, когда данная задача решается в условиях неопределенности одним из подходов к ее решению является рассмотрение значений параметров объекта в качестве реализаций случайного процесса и применение к данным реализациям аппарата экстраполяции случайных процессов. Наиболее универсальным методом экстраполяции с точки зрения накладываемых на случайный процесс ограничений является метод прогноза, базирующийся на каноническом разложении исследуемого случайного процесса [1]. Получаемая с помощью данного метода оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка $m_x^{(k)}(i)$ линейного прогноза незашумленного случайного процесса $X(t)$ по результатам последовательных измерений $x(\mu), \mu = 1, k$ имеет вид [1]:

$$m_x^{(\mu)}(i) = \begin{cases} 0, & \text{при } \mu=0, i=\overline{1, I}; \\ m_x^{(\mu-1)}(i) + [x(\mu) - m_x^{(\mu-1)}(\mu)]\varphi_\mu(i), & \mu=\overline{1, k}, i=\overline{\mu+1, I}. \end{cases} \quad (1)$$

Выражение (1) может быть записано в явной эквивалентной форме:

$$m_x^{(k)}(i) = \sum_{\mu=1}^k x(\mu) f_\mu^{(k)}(i), \quad i=\overline{k+1, I}, \quad (2)$$

где

$$f_\mu^{(k)}(i) = \begin{cases} f_\mu^{(k-1)}(i) - f_\mu^{(k-1)}(k)\varphi_k(i), & \mu \leq k-1; \\ \varphi_k(i), & \mu = k. \end{cases} \quad (3)$$

В (1), (2) без ограничения общности положено, что математическое ожидание случайного процесса $X(t)$ в исследуемых точках дискретизации равно нулю $m_x(i) = 0, i=\overline{1, I}$, (данное предположение сохраняется на протяжении всего последующего изложения), а $\varphi_\mu(i), \mu=\overline{1, k}$ являются координатными функциями канонического разложения процесса $X(t)$

$$X(i) = \sum_{v=1}^i V_v \varphi_v(i), \quad i=\overline{1, I}, \quad (4)$$

элементы которого с использованием известной дискретизированной функции дисперсии $D_x(i)$ и корреляционной функции $R_x(i, j), i, j = \overline{1, I}$ определены стандартным образом:

$$V_i = X(i) - \sum_{v=1}^{i-1} V_v \varphi_v(i), \quad i=\overline{1, I}; \quad (5)$$

$$D_v(v) = D_x(i) - \sum_{v=1}^{i-1} D_v(v) \varphi_v^2(i), \quad i=\overline{1, I}; \quad (6)$$

$$\varphi_v(i) = \frac{1}{D_v(v)} [R_x(v,i) - \sum_{j=1}^{v-1} D_v(j) \varphi_j(v) \varphi_j(i)], \quad v=\overline{1, I}, \quad i=\overline{1, I}; \quad (7)$$

где $D_v(i)$, $i=\overline{1, I}$ - дисперсия некоррелированных случайных коэффициентов V_i , $i=\overline{1, I}$.

Выражения (1), (2) в рамках линейного приближения определяют условное математическое ожидание случайного процесса $X(t)$ при условии $X(\mu) = x(\mu)$, $\mu=\overline{1, k}$, т.е. дают несмещенную оценку будущих значений экстраполируемой реализации и обеспечивают абсолютный минимум среднего квадрата погрешности линейной экстраполяции

$$E_x^{(k)}(i) = M \left[m_x^{(k)}(i) - X(i) \right]^2, \quad i=\overline{k+1, I} \quad (8)$$

равной дисперсии

$$E_x^{(k)}(i) = D_x^{(k)}(i) = \sum_{v=k+1}^i D_v(v) \varphi_v^2(i), \quad i=\overline{k+1, I} \quad (9)$$

апостериорной случайной последовательности

$$X^{(k)}(i) = m_x^{(k)}(i) + \sum_{v=k+1}^i V_v \varphi_v(i), \quad i=\overline{1, I} \quad (10)$$

Единственное требование алгоритма (1),(2) к исследуемому процессу - конечность дисперсии в точках дискретизации - не является существенным ограничением и, как правило, выполняется для физических процессов.

Предположим, что значения $X(i)$, $i=\overline{1, I}$ не наблюдаемы из-за погрешностей измерений $Y(i)$, $i=\overline{1, I}$: $m_y(i) = 0$, $R_y(i,i) = D_y(i)$, $i=\overline{1, I}$, $R_y(i,j) = 0$, $i \neq j$, $i=\overline{1, I}$. В совокупности $X(i)$ и $Y(i)$ формируют случайную последовательность результатов измерений $\{Z\}$:

$$Z(i) = X(i) + Y(i), \quad i=\overline{1, I} \quad (11)$$

Простейший алгоритм экстраполяции $X(t)$ по $z(\mu)$, $\mu=\overline{1, k}$, на базе канонического разложения (4) имеет вид:

$$m_{x/z}^{(k)}(i) = \sum_{\mu=1}^k z(\mu) f_{\mu}^{(k)}(i), \quad i=\overline{k+1, I} \quad (12)$$

Средний квадрат погрешности экстраполяции алгоритмом (12) определяется из выражения

$$E_{x/z}^{(k)} = D_x(i) - 2 \sum_{\mu=1}^k R_x(\mu, i) f_{\mu}^{(k)}(i) + \sum_{\mu=1}^k \sum_{v=1}^k R_z(\mu, v) f_{\mu}^{(k)}(i) f_v^{(k)}(i), \quad i=\overline{1, I} \quad (13)$$

Естественным шагом к повышению качества экстраполяции является замена в алгоритме (12) результатов измерений $z(\mu)$, $\mu=\overline{1, k}$ некоторыми оценками $\hat{x}(\mu)$, $\mu=\overline{1, k}$, обладающие лучшими точностными характеристиками: $M \left[X(\mu) - \hat{X}(\mu) \right]^2 < D_y(\mu)$.

Используя подход Калмана, выражение для определения несмещенной оценки запишется как:

$$\hat{x}(\mu) = (1 - B_{\mu}) m_x^{(\mu-1)}(\mu) + B_{\mu} z(\mu), \quad \mu=\overline{1, k}, \quad (14)$$

где $m_x^{(\mu-1)}(\mu)$ - результат прогноза на μ -тый шаг по

$(\mu-1)$ предшествующей оценке $\hat{x}(v)$, $v=\overline{1, \mu-1}$;

B_{μ} - коэффициент фильтрации, который определяется из условия минимума среднего квадрата ошибки приближения $M \left[X(\mu) - \hat{X}(\mu) \right]^2$.

Подстановка оценки (14) в (12) дает алгоритм экстраполяции с предварительной фильтрацией погрешностей измерений, который может быть записан в рекуррентной и явной форме [2]:

$$m_x^{(\mu)}(i) = \begin{cases} 0, & \text{при } \mu=0, \quad i=\overline{1, I}; \\ m_x^{(\mu-1)}(i) + B_{\mu} [z(\mu) - m_x^{(\mu-1)}(\mu)] \varphi_{\mu}(i), & \mu=\overline{1, k}, \quad i=\overline{k+1, I}; \end{cases} \quad (15)$$

$$m_x^{(k)}(i) = \sum_{\mu=1}^k S_{\mu}^{(k)}(i) z(\mu), \quad k < I, \quad i=\overline{k+1, I}; \quad (16)$$

где

$$S_{\mu}^{(k)}(i) = \begin{cases} S_{\mu}^{(k)}(i) - S_{\mu}^{(k-1)}(k) B_k \varphi_k(i), & \mu < k, \\ B_k \varphi_k(i), & \mu = k. \end{cases} \quad (17)$$

С учетом выражения (16) соотношения для определения оптимальных значений B_{μ} запишется как:

$$B_{\mu} = \frac{E_x^{(\mu-1)}(\mu)}{E_x^{(\mu-1)}(\mu) + D_y(\mu)}, \quad (18)$$

где $E_x^{(\mu-1)}(\mu)$ - средний квадрат ошибки экстраполяции $x(\mu)$ по $(\mu-1)$ результатам измерений:

$$E_x^{(\mu-1)}(\mu) = D_x(\mu) - 2 \sum_{v=1}^{\mu-1} R_x(v, \mu) S_v^{(\mu-1)}(\mu) + \sum_{v=1}^{\mu-1} \sum_{j=1}^{\mu-1} R_z(v, j) S_v^{(\mu-1)}(\mu) S_j^{(\mu-1)}(\mu). \quad (19)$$

Соответственно качество экстраполяции алгоритмом (15), (16) в точках дискретизации $i=\overline{k+1, I}$ для k известных значений $z(\mu)$, $\mu=\overline{1, k}$, определяется выражением:

$$E_x^{(k)} = D_x(i) - 2 \sum_{\mu=1}^k R_x(\mu, i) S_{\mu}^{(k)}(i) + \sum_{\mu=1}^k \sum_{v=1}^k R_z(\mu, v) S_{\mu}^{(k)}(i) S_v^{(k)}(i), \quad i=\overline{k+1, I}. \quad (20)$$

Следует отметить, что алгоритм (15), (16) является аналогом известных модификаций фильтра Калмана для фильтрации (экстраполяции) немарковских случайных процессов. Так, например, не сложно показать,

что в одном из таких решений, базирующихся на понятии "пространство фазовых состояний" [3] размерности эквивалентной количеству известных измерений, матричное уравнение системы

$$\bar{X}(\mu) = A(\mu, \mu-1)\bar{X}(\mu-1) + A(\mu) \cdot V_\mu,$$

которое описывает динамику изменения

$X(t)$ в точке t_μ , с учетом свойства

$$M[\bar{X}(\mu)\bar{X}(\mu-1)] = TM(\mu, \mu-1)M[\bar{X}(\mu-1)\bar{X}(\mu-1)]$$

$$\begin{pmatrix} X(2) \\ X(3) \\ \dots \\ X(\mu-1) \\ X(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & 1 & \bar{0} \\ f_1^{(\mu-1)}(\mu) & f_2^{(\mu-1)}(\mu) & \dots & f_{\mu-2}^{(\mu-1)}(\mu) & f_{\mu-1}^{(\mu-1)}(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(1) \\ X(2) \\ \dots \\ X(\mu-2) \\ X(\mu-1) \end{pmatrix} + \dots V_\mu \quad (21)$$

может быть приведено к виду: т.е. результат прогноза $x(\mu)$ с помощью (21) по $z(v)$, $v=\overline{1, \mu-1}$

тождественен оценке (12) для $k=\mu-1$, $i=\mu$,

а результат фильтрации оценки (14).

Алгоритм (15),(16) наряду с очевидными достоинствами (отсутствие ограничений на исследуемый случайный процесс $X(t)$, простота вычислений) обладает существенным недостатком - в экстраполяционную форму (1),(2), оптимальную для $x(\mu)$, $\mu=\overline{1, k}$, подставляются оценки $\bar{x}=(\mu)$, $\mu=\overline{1, k}$, вероятностные характеристики которых отличаются от $x(\mu)$, $\mu=\overline{1, k}$. Наличие данного рассогласования, очевидно, ограничивает качество экстраполяции.

Указанный недостаток может быть устранен за счет перехода от канонического разложения (4), положенного в основу всех приведенных выше алгоритмов, к каноническому разложению смешанной случайной последовательности $\{X'\} = \{Z(1), Z(2), \dots, Z(k), X(k+1), \dots, X(I)\}$, сочетающей в себе как результаты измерений до $i=k$, так и данные о процессе $X(t)$ для $i=\overline{k+1, I}$ [4]:

$$x'(i) = \sum_{v=1}^i U_v \beta_v(i), \quad i=\overline{1, I}. \quad (22)$$

Элементы канонического разложения (21) определяются соотношениями:

$$U_i = Z(i) \sum_{v=1}^i U_v \beta_v(i), \quad i=\overline{1, k} \quad (23)$$

$$U_i = X(i) - \sum_{v=1}^{i-1} U_v \beta_v(i), \quad i=\overline{k+1, I}; \quad (24)$$

$$D_U(i) = D_Z(i) - \sum_{v=1}^{i-1} D_U(v) \beta_v^2(i), \quad i=\overline{1, k}; \quad (25)$$

$$D_U(i) = D_x(i) - \sum_{v=1}^{i-1} D_U(v) \beta_v^2(i), \quad i=\overline{k+1, I}; \quad (26)$$

$$\beta_v(i) = \frac{1}{D_U(v)} [R_x(v, i) - \sum_{j=1}^{v-1} D_U(j) \beta_j(v) \beta_j(i)], \quad v=\overline{1, I}, \quad i=\overline{v, I}, \quad \mu \leq i. \quad (27)$$

Алгоритм оптимальной в среднеквадратическом смысле линейной экстраполяции на базе канонического разложения (21) имеет вид:

$$m_{x/z}^{(\mu)}(i) = \begin{cases} 0, & \mu=0, \quad i=\overline{1, I}; \\ m_{x/z}^{(\mu-1)}(i) + (z(\mu) - m_{x/z}^{(\mu-1)}(\mu)) \beta_\mu(i), & \mu=\overline{1, k}, \quad i=\overline{k+1, I}; \end{cases} \quad (28)$$

или может быть записан в явной эквивалентной форме Винера [4]:

$$m_{x/z}^{(k)}(i) = \sum_{\mu=1}^k z(\mu) b_\mu^{(k)}(i), \quad i=\overline{k+1, I}, \quad (29)$$

где

$$b_\mu^{(k)}(i) = \begin{cases} b_\mu^{(k-1)}(i) - b_\mu^{(k-1)}(k) \beta_\mu(i), & \mu < k; \\ \beta_\mu(i), & \mu = k. \end{cases} \quad (30)$$

Выражение (28),(29) определяет условное математическое ожидание последовательности $\{x'\}$ при условии $Z(\mu) = z(\mu)$, $\mu=\overline{1, k}$. Средний квадрат погрешности экстраполяции алгоритмом (27),(28) равен дисперсии

$$E_{x/z}^{(k)}(i) = D_x^{(k)}(i) = \sum_{v=k+1}^i D_U(v) \beta_v(i), \quad i=\overline{k+1, I} \quad (31)$$

апостериорной случайной последовательности

$$x'^{(k)}(i) = m_{x/z}^{(k)}(i) + \sum_{v=k+1}^i U_v \beta_v(i), \quad i=\overline{1, I}. \quad (32)$$

Алгоритм (15),(16), в основу которого положена идея калмановской фильтрации и алгоритм (28),(29), который представляет собой фильтр-экстраполятор Винера для нестационарных случайных процессов (4), используют для своей работы одинаковый объем априорной информации. В связи с этим с целью определения влияния рассогласования в алгоритме (15),(16) естественным является проведение сравнительного анализа качества экстраполяции данными алгоритмами.

Предположим, что (15),(16) дает оптимальный в среднеквадратическом смысле результат экстраполяции, тогда в силу теоремы про единство оптимального решения:

$$m_{x/z}^{(k)}(i) = m_{x'}^{(k)}(i), \quad i=\overline{k+1, I}. \quad (33)$$

Из (33) следует соотношение:

$$\beta_v(i) = \beta_v(v) \varphi_v(i), \quad v=\overline{1, k}, \quad (34)$$

которое с учетом выражений (7),(27) для количества измерений k приводится к виду

$$\sum_{v=1}^{k-1} (D_v(v) - D_u(v)\beta_v^2(v))(D_x(k)\phi_v(k)\phi_v(i) - R_x(k,i)\phi_v^2(k)) = 0. \quad (35)$$

Для двух известных значений ($k=2$) уравнение (35), а следовательно и (33) истинно, если (для $k=1$ - марковский случай - (33) выполняется без каких-либо условий) выполняется хотя бы одно из условий:

$$D_v(1) = D_u(1)\beta_1^2(1), \quad (36)$$

или

$$D_x(2)R_x(1,i) = R_x(1,2)R_x(2,i) \quad (37)$$

Выражение (36) эквивалентно уравнению

$$D_z(1) = D_x(1),$$

т.е. ложно, остается (37).

В случае, когда для прогноза используются два произвольных измерения, из области возможных значений $\overline{1,k}$ соотношение (37) приобретает вид:

$$D_x(v)R_x(\mu,i) = R_x(\mu,v)R_x(v,i), \quad v, \mu = \overline{1,k}, \quad \mu < v. \quad (38)$$

Учитывая, во-первых, рекуррентный характер алгоритмов экстраполяции ($m^{(2)}(i)$ используется для вычисления $m^{(3)}(i), m^{(4)}(i), \dots$), во-вторых, в каноническом разложении может быть произвольный порядок следования точек дискретизации (для вычисления $m^{(2)}(i)$ могут быть использованы два значения, которые соответствуют произвольным сечениям из $\overline{1,k}$) соотношение (37) должно выполняться и для количества известных значений > 2 .

Однако, случайный процесс обладающий данным свойством является марковским, так как

$$M[X(i) / x(1), \dots, x(v)] = x(v) \frac{R_x(v,i)}{D_x(v)},$$

если справедливо уравнение

$$M[(X(i) - X(v)) \frac{R_x(v,i)}{D_x(v)} | X(\mu)] = 0, \quad \mu = \overline{1,v},$$

которое эквивалентно (38).

Т.е. алгоритм (15), (16) является оптимальным только для марковских случайных процессов и его явная форма записи в данном случае значительно упрощается:

$$m_{x/x}^{(k)}(i) = \sum_{\mu=1}^k z(\mu) B_{\mu}(k) \frac{R_x(\mu,i)}{D_x(\mu)}, \quad i = \overline{k, I}; \quad (43)$$

где

$$B_{\mu}(k) = \begin{cases} B_{\mu}(k-1) - B_{\mu}(k-1)B_k, & \mu < k; \\ B_{\mu}, & \mu = k. \end{cases} \quad (44)$$

Таким образом, в статье осуществлен анализ качества линейной экстраполяции скалярных случайных процессов на базе аппарата канонических разложений при различном объеме известной априорной и апостериорной информации о исследуемом процессе. В частности получен вывод о том, что переход от скалярного случайного процесса со значительным последствием к векторному марковскому процессу дает квазиоптимальный результат решения задачи фильтрации-экстраполяции методом Калмана.

Литература

1. Кудрицкий В.Д. Прогнозирующий контроль радиоэлектронных устройств.- К.: Техника, 1982.-168 с.
2. Кудрицкий В.Д., Атаманюк И.П., Иващенко Е.Н. Оптимальная линейная экстраполяция реализации случайного процесса с фильтрацией погрешностей коррелированных измерений. //Кибернетика и системный анализ.- 1995.- N1.- с. 99- 107.
3. Дж. Медич. Статистически оптимальные линейные оценки и управление.- М.: Энергия, 1973.-440 с.
4. Кудрицкий В.Д., Атаманюк И.П. Алгоритм определения оптимальных параметров фильтра - экстраполятора Винера для нестационарных случайных процессов, наблюдаемых с погрешностями. //Кибернетика и системный анализ.- 1996.- N3.- с. 183-186.