УДК 519.216

И.П. Атаманюк

ОПТИМАЛЬНАЯ ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ РЕАЛИЗАЦИИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ФИЛЬТРАЦИЕЙ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

Решение многих актуальных научно-технических задач связано с применением экстраполирующих алгоритмов и устройств, которые по известной, т.е. доступной наблюдению, части процесса позволяют сделать оценки неизвестной, недоступной, его части. Заметим, что экстраполирующие алгоритмы используются в системах автоматического управления инерционными объектами и в системах с запаздыванием. Исключительно широкое распространение получил алгоритм линейного прогнозирования, используемый в вокодерах современных систем цифровой связи, в системах сжатия аудио- и видеосигналов [1]. Также широко применяются прогнозирующие алгоритмы на основе нейронных сетей, фильтры Калмана–Бьюси, метод группового учета аргументов и ряд других [2–7]. Однако, несмотря на указанное разнообразие, потребность в быстродействующих, робастных и максимально точных алгоритмах и устройствах прогноза актуальна в настоящее время и в перспективе.

Наиболее универсальное решение задачи прогноза получено в [8] в предположении, что исследуемый случайный процесс $X(t)$ задан своим каноническим разложением [9] в дискретном ряде точек t_i, $i=\overline{1,I}$,

$$X(i)=\sum_{\nu=1}^{i}V_\nu\varphi_\nu(i),\ \ i=\overline{1,k}\,. \tag{1}$$

Универсальность полученного решения определяется тем, что каноническое разложение (1) существует и точно описывает в точках t_i любой случайный процесс с конечной дисперсией.

В (1) без ограничения общности положено $\mathrm{M}[X(i)]=0$, $i=\overline{1,I}$, а элементы канонического разложения определены стандартным образом:

$$V_1=X(1),\ \ V_i=X(i)-\sum_{\nu=1}^{i-1}V_\nu\varphi_\nu(i),\ \ i=\overline{2,I}; \tag{2}$$

$$D_1=D_x(1),\ \ D_i=D_x(i)-\sum_{\nu=1}^{i-1}D_\nu\varphi_\nu^2(i),\ \ i=\overline{2,I}; \tag{3}$$

$$\varphi_\mu(i)=\frac{1}{D_\mu}\left[R_x(\mu,i)-\sum_{\nu=1}^{\mu-1}D_\nu\varphi_\nu(\mu)\varphi_\nu(i)\right],\ \ \mu=\overline{1,I},\ \ i=\overline{\mu,I}\,. \tag{4}$$

В (3), (4) $D_x(i)$, $i=\overline{1,I}$, — дискретизированная функция дисперсии, а $R_x(\mu,i)$, $\mu=\overline{1,I}$, $i=\overline{\mu,I}$, — корреляционная матрица случайной последовательности $X(i)$, $i=\overline{1,I}$.

На базе представления (1) алгоритм оптимальной в среднеквадратическом смысле линейной экстраполяции реализации случайного процесса $X(t)$ по k известным последовательным начальным значениям $X(\mu)=x(\mu)$, $\mu=\overline{1,k}$, $k<I$, может быть представлен в одной из двух эквивалентных форм.

Первая из них представляет собой рекуррентное соотношение

$$m_x^{(\mu)}(i)=\begin{cases}0, & \mu=0,\, i=\overline{1,I},\\ m_x^{(\mu-1)}(i)+[x(\mu)-m_x^{(\mu-1)}(\mu)]\varphi_\mu(i), & \mu=\overline{1,k},\, i=\overline{\mu+1,I}.\end{cases} \tag{5}$$

Вторая (явная) форма записи имеет вид

$$m_x^{(k)}(i)=\sum_{\mu=1}^{k}x(\mu)f_\mu^{(k)}(i),\ \ i=\overline{k+1,I}, \tag{6}$$

где $f_\mu^{(k)}(i)$ — весовые функции, определяемые через координатные функции $\varphi_\nu(i)$ исходного канонического разложения (1) рекуррентным образом:

$$f_\mu^{(k)}(i)=\begin{cases}f_\mu^{(k-1)}(i)-f_\mu^{(k-1)}(k)\varphi_k(i), & \mu\le k-1,\\ \varphi_k(i), & \mu=k.\end{cases} \tag{7}$$

В предположении, что в процессе $X(t)$ имеют место только корреляционные связи, выражения (5), (6) определяют условное математическое ожидание случайного процесса

$$X^{(k)}(i)=m_x^{(k)}(i)+\sum_{\nu=k+1}^{i}V_\nu\varphi_\nu(i),\ \ i=\overline{k+1,I}, \tag{8}$$

возникающего из априорного при условии $X(\mu)=x(\mu)$, $\mu=\overline{1,k}$.

Таким образом, оценки (5), (6) будущих значений экстраполируемой реализации процесса обеспечивают минимум среднеквадратической ошибки прогноза

$$E_x^{(k)}(i)=M[\,|m_x^{(k)}(i)-X(i)|^2],\ \ i=\overline{k+1,I}, \tag{9}$$

равный дисперсии апостериорного процесса

$$E_x^{(k)}(i)=D_x^{(k)}(i)=\sum_{\nu=k+1}^{i}D_\nu\varphi_\nu^2(i),\ \ i=\overline{k+1,I}. \tag{10}$$

Увеличение объема информации о случайном процессе, используемой в алгоритме прогноза, возможно на базе канонического разложения [10, 14]

$$X(i)=\sum_{\nu=1}^{i}\sum_{\lambda=1}^{N-1}W_\nu^{(\lambda)}\beta_{1\nu}^{(\lambda)}(i),\ \ i=\overline{1,I}. \tag{11}$$

Элементы разложения (11) определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$W_\nu^{(\lambda)}=X^\lambda(\nu)-\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\sum_{j=1}^{N-1}W_\mu^{(j)}\beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)-\sum_{j=1}^{\lambda-1}W_\nu^{(j)}\beta_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu),\ \ \nu=\overline{1,I}; \tag{12}$$

$$D_\lambda(\nu)=M[\{W_\nu^{(\lambda)}\}^2]=$$

$$=M[X^2(\nu)]-\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\sum_{j=1}^{N-1}D_j(\mu)\{\beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)\}^2-(\nu)\{\beta_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu)\}^2,\ \ \nu=\overline{1,I}; \tag{13}$$

$$\beta_{h\nu}^{(\lambda)}(i)=\frac{M[W_\nu^{(\lambda)}X^h(i)]}{M[\{W_\nu^{(\lambda)}\}^2]}=\frac{1}{D_\lambda(\nu)}\Bigg\{M[X^\lambda(\nu)X^h(i)]-$$

$$-\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\sum_{j=1}^{N-1}D_j(\mu)\beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)\beta_{h\mu}^{(j)}(i)-\sum_{j=1}^{\lambda-1}D_j(\nu)\beta_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu)\beta_{h\nu}^{(j)}(i)\Bigg\},\ \lambda=\overline{1,h},\ \nu=\overline{1,i}. \quad (14)$$

В каноническом разложении (11) случайный процесс $X(t)$ представлен в исследуемом ряде точек t_i, $i=\overline{1,I}$, с помощью $N-1$ массива $\{W^{(\lambda)}\}$, $\lambda=\overline{1,N-1}$, некоррелированных центрированных случайных коэффициентов $W_i^{(\lambda)}$, $i=\overline{1,I}$. Данные коэффициенты содержат информацию о значениях $X^\lambda(i)$, $\lambda=\overline{1,N-1}$, $i=\overline{1,I}$, а координатные функции $\beta_{h\nu}^{(\lambda)}(i)$, $\lambda,h=\overline{1,N-1}$, $\nu,i=\overline{1,I}$, описывают вероятностные связи порядка $\lambda+h$ между сечениями t_ν и t_i, $\nu,i=\overline{1,I}$.

Алгоритм экстраполяции, так же как и в линейном случае (5), (6), имеет две формы записи [11, 13]:

$$m_x^{(\mu,l)}(h,i)=\begin{cases}0, & \mu=0;\\ m_x^{(\mu,l-1)}(h,i)+(x^h(\mu)-m_x^{(\mu,l-1)}(l,\mu))\varphi_{h\mu}^{(l)}(i), & l\neq 1,\\ m_x^{(\mu,N-1)}(h,i)+(x^h(\mu)-m_x^{(\mu-1,N-1)}(l,\mu))\varphi_{h\mu}^{(1)}(i), & l=1,\end{cases} \quad (15)$$

либо

$$m_x^{(k,N-1)}(1,i)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{N-1}x^\nu(j)S_{((j-1)(N-1)+\nu)}^{(k(N-1))}((i-1)(N-1)+1), \quad (16)$$

где

$$S_\lambda^{(\alpha)}(\xi)=\begin{cases}S_\lambda^{(\alpha-1)}(\xi)-S_\lambda^{(\alpha-1)}(\alpha)\gamma_k(i), & \lambda\le\alpha-1;\\ \gamma_\alpha(\xi), & \lambda=\alpha;\end{cases} \quad (17)$$

$$\gamma_\alpha(\xi)=\begin{cases}\beta_{1,[\alpha/(N-1)]+1}^{(\mathrm{mod}_{N-1}(\alpha))}([\alpha/(N-1)]+1) & \text{для } \xi\le k(N-1);\\ \beta_{1,[\alpha/(N-1)]+1}^{(\mathrm{mod}_{N-1}(\alpha))}(i), & \text{если } \xi=(i-1)(N-1)+1.\end{cases} \quad (18)$$

При этом среднеквадратическая погрешность экстраполяции определяется как

$$M[X(i/x^\nu(j),\nu=1,\overline{N-1},\ j=\overline{1,k})-m_x^{(k,N-1)}(1,i)]=$$

$$=M[X^2(i)]-\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{N-1}M[(W_j^{(\nu)})^2](\beta_{1j}^{(\nu)}(i))^2,\ i=\overline{k+1,I}. \quad (19)$$

Выражение $m_x^{(\mu,l)}(h,i)=M[X^h(i)/x^\nu(j),j=\overline{1,\mu-1},\nu=\overline{1,N-1};x^\nu(\mu),\nu=\overline{1,l}]$ для $h=1$, $l=N-1$, $\mu=k$, является несмещенной оптимальной оценкой $m_x^{(k,N-1)}(1,i)$ будущего значения $x(i)$, $i=\overline{k+1,I}$, при условии, что для вычисления данной оценки используются значения $x^\nu(j)$, $\nu=\overline{1,N-1}$, $j=\overline{1,k}$.

Теорема. Если случайный процесс $X(t)$ полностью задан дискретизированной моментной функцией $M[X^\lambda(\nu)X^h(i)]$, $\lambda,h=\overline{1,N}$, $\nu,i=\overline{1,I}$, в исследуемом ряде точек t_i, $i=\overline{1,I}$, то алгоритм (15), (16) дает оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку будущих значений процесса $X(t)$.

Доказательство. Предположим, что для множества случайных коэффициентов $W_i^{(\lambda)}$, $\lambda=\overline{1,N}$, $i=\overline{1,I}$, построено каноническое разложение

$$X(i)=\sum_{\nu=1}^{i}\sum_{\lambda=1}^{N-1}W_\nu^{(\lambda)}\psi_{1\nu}^{(\lambda)}(i),\quad i=\overline{1,I},$$

где $\psi_{1\nu}^{(\lambda)}(i)$ — произвольные функции.

Определим для этого случая среднеквадратическую ошибку приближения

$$E(i)=M\left[\left\{X(i)-\sum_{\nu=1}^{i}\sum_{\lambda=1}^{N-1}W_\nu^{(\lambda)}\psi_{1\nu}^{(\lambda)}(i)\right\}^2\right],\ i=\overline{1,I}.$$

С учетом некоррелированности коэффициентов и определения (14) координатных функций непосредственное вычисление дает

$$E(i)=M[X^2(i)]+\sum_{\nu=1}^{i}\sum_{\lambda=1}^{N-1}D_\lambda(\nu)[\{\psi_{1\nu}^{(\lambda)}(i)\}^2-2\psi_{1\nu}^{(\lambda)}(i)\beta_{1\nu}^{(\lambda)}(i)],\ i=\overline{1,I},$$

но

$$\{\psi_{1\nu}^{(\lambda)}(i)\}^2-2\psi_{1\nu}^{(\lambda)}(i)\beta_{1\nu}^{(\lambda)}(i)=[\psi_{1\nu}^{(\lambda)}(i)-\beta_{1\nu}^{(\lambda)}(i)]^2-\{\beta_{1\nu}^{(\lambda)}(i)\}^2,$$

откуда

$$E(i)=D_x(i)-\sum_{\nu=1}^{i}\sum_{\lambda=1}^{N-1}D_\lambda(\nu)\{\beta_{1\nu}^{(\lambda)}(i)\}^2+\sum_{\nu=1}^{i}\sum_{\lambda=1}^{N-1}D_\lambda(\nu)\{\psi_{1\nu}^{(\lambda)}(i)-\beta_{1\nu}^{(\lambda)}(i)\}^2,\ i=\overline{1,I}.$$

Из последнего выражения следует, что при любом i среднеквадратическая ошибка будет наименьшей и равной апостериорной дисперсии случайного процесса $X(t)$, если $\psi_{1\nu}^{(\lambda)}(i)=\beta_{1\nu}^{(\lambda)}(i)$.

Таким образом, координатные функции $\beta_{1\nu}^{(\lambda)}(i)$ оптимальны и, следовательно, оценка

$$m_x^{(k,N-1)}(1,i)=\sum_{\nu=1}^{k}\sum_{\lambda=1}^{N-1}W_\nu^{(\lambda)}\beta_{1\nu}^{(\lambda)}(i)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{N-1}x^\nu(j)S_{((j-1)(N-1)+\nu)}^{(k(N-1))}((i-1)(N-1)+1)$$

обеспечивает минимум среднеквадратической ошибки приближения к будущим значениям исследуемого случайного процесса $X(t)$.

Решение задачи прогноза (15), (16) предполагает использование истинных значений случайного процесса $X(t)$ в точках t_j, $j=\overline{1,k}$. Однако в реальных ситуациях предположение о том, что измеренные значения $x(j)$, $j=\overline{1,k}$, известны абсолютно точно, никогда не выполняется.

Пусть в результате измерений наблюдается случайный процесс

$$Z(i)=X(i)+Y(i),\ i=\overline{1,I}, \tag{20}$$

где $Y(i)$, $i=\overline{1,I}$, — случайная погрешность измерения, $X(i)$, $i=\overline{1,I}$, — ненаблюдаемая составляющая. Без ограничения общности предполагается, что составляющие (20) некоррелированны $M[X(i),Y(j)]=0$, $i,j=\overline{1,I}$, и $M[X(i)]=M[Y(i)]=0$, $i=\overline{1,I}$. Необходимо получить оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку будущих значений случайного процесса: $X(t):M[X^\lambda(\nu)X^h(i)]$, $\lambda,h=\overline{1,N}$, ν, $i=\overline{1,I}$, по результатам измерений $z(j)$, $j=\overline{1,k}$.

 ISSN 0572-2691

В рамках такой постановки простейшее неоптимальное решение задачи предполагает использование для прогноза алгоритма (5), (6), подставляя в него результаты измерений

$$m_{x/z}^{(\mu)}(i) == \begin{cases} 0, & \mu = 0,\ i = \overline{1, I}, \\ m_{x/z}^{(\mu-1)}(i) + [z(\mu) - m_{x/z}^{(\mu-1)}(\mu)]\varphi_\mu(i), & \mu = \overline{1, k},\ i = \overline{\mu+1, I}, \end{cases} \tag{21}$$

или

$$m_{x/z}^{(k)}(i) = \sum_{\mu=1}^{k} z(\mu) f_\mu^k(i),\ i = \overline{k+1, I}. \tag{22}$$

Условное математическое ожидание по-прежнему остается несмещенной оценкой будущих значений истинной экстраполируемой реализации. При этом ошибку одиночной экстраполяции запишем как

$$\Delta_{\text{x/z}}^{(k)}(i) = m_{x/z}^{(k)}(i) - x^{(k)}(i),\ i = \overline{k+1, I},$$

где $x^{(k)}(i),\ i = \overline{k+1, I},$ — истинные значения экстраполируемой реализации в области прогноза. Эти значения фактически неизвестны, и в области прогноза реализация $x^{(k)}(i)$ развивается случайным образом, вследствие чего ошибка одиночной экстраполяции приобретает случайный характер:

$$\delta_{x/z}^{(k)}(i) = m_{x/z}^{(k)}(i) - m_x^{(k)}(i) - \sum_{\nu=k+1}^{i} V_\nu \varphi_\nu(i). \tag{23}$$

Применение к последнему выражению операции математического ожидания

$$S^{(k)}(i) = M[\delta_{x/z}^{(k)}(i)] = m_{x/z}^{(k)}(i) - m_x^{(k)}(i) = \sum_{\mu=1}^{k} y(\mu) f_\mu^{(k)}(i),\ i = \overline{k+1, I}, \tag{24}$$

показывает, что в данном случае, в отличие от идеального, одиночная экстраполяция сопровождается условной систематической ошибкой.

Соответственно дисперсия погрешности одиночной экстраполяции из (23), (24) определяется как

$$M[\left|\delta_z^{(k)}(i) - S^{(k)}(i)\right|^2] = \sum_{\nu=k+1}^{i} D_\nu \varphi_\nu^2(i) = D_x^{(k)}(i),\ i = \overline{k+1, I}. \tag{25}$$

С использованием (23), (24) среднеквадратическую погрешность одиночной экстраполяции запишем в виде

$$E_{z/z}^{(k)}(i / z(\mu), \mu = \overline{1, k}) = \{S^{(k)}(i)\}^2 + D_x^{(k)}(i),\ i = \overline{k+1, I}. \tag{26}$$

Поскольку погрешность (26) условная, для полной характеристики точности алгоритма (21), (22) необходимо усреднение (26) по условию, в предположении, что значения $z(\mu)$, $\mu = \overline{1, k}$, случайны, что дает окончательное выражение для среднеквадратической ошибки прогноза

$$E_{x/z}^{(k)}(i) = \sum_{\mu=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} R_y(\mu, \nu) f_\mu^{(k)}(i) f_\nu^{(k)}(i) + D_x^{(k)}(i),\ i = \overline{k+1, I}. \tag{27}$$

Повышение качества экстраполяции случайного процесса $X(t)$, наблюдаемого с шумами, возможно за счет перехода от результатов измерения $z(\mu)$, $\mu = \overline{1, k}$, $k < I$, к оценке [4, 12]

$$\hat{x}(\mu) = (1 - B^{(\mu)}) m_{\hat{x}}^{(\mu-1)}(\mu) + B^{(\mu)} z(\mu),\ \mu = \overline{1, k}. \tag{28}$$

Алгоритм оптимальной линейной экстраполяции с предварительной фильтрацией погрешностей измерения приобретает вид [13, 15]

$$m_{\hat{x}}^{(\mu)}(i) = \begin{cases} 0, & \mu = 0, \ i = \overline{1, I}, \\ m_{\hat{x}}^{(\mu)}(i) + B^{(\mu)}[z(\mu) - m_{\hat{x}}^{(\mu-1)}(\mu)]\varphi_\mu(i), & \mu = \overline{1, k}, \ i = \overline{\mu+1, I}, \end{cases} \tag{29}$$

или

$$m_{\hat{x}}^{(k)}(i) = \sum_{\mu=1}^{k} z(\mu) L_\mu^{(k)}(i), k < I, \ i = \overline{k+1, I}, \tag{30}$$

где $L_\mu^{(k)}(i)$ — аналогичные (7) весовые функции, определяемые как

$$L_\mu^{(k)}(i) = \begin{cases} L_\mu^{(k-1)}(i) - L_\mu^{(k)}(k) B^{(k)} \varphi_k(i), & \mu < k, \\ B^{(k)} \varphi_k(i), & \mu = k. \end{cases} \tag{31}$$

Коэффициенты $B^{(\mu)}, \mu = \overline{1, k}$, определяются из условия минимума среднеквадратической погрешности фильтрации с помощью выражения

$$B^{(k)} = \frac{B_1^{(k)} + B_2^{(k)} - B_3^{(k)}}{B_1^{(k)} + B_2^{(k)} - 2B_3^{(k)} + D_y(k)}, \tag{32}$$

где

$$B_1^{(k)} = D_x(k) - 2\sum_{\mu=1}^{k-1} R_x(\mu, k) L_\mu^{(k-1)}(k) + \sum_{\mu=1}^{k-1} \sum_{\nu=1}^{k-1} R_x(\mu, \nu) L_\mu^{(k-1)}(k) L_\nu^{(k-1)}(k);$$

$$B_2^{(k)} = \sum_{\mu=1}^{k-1} \sum_{\nu=1}^{k-1} R_y(\mu, \nu) L_\mu^{(k-1)}(k) L_\nu^{(k-1)}(k);$$

$$B_3^{(k)} = \sum_{\mu=1}^{k-1} R_y(\mu, k) L_\mu^{(k-1)}(k).$$

Среднеквадратическая погрешность экстраполяции с использованием алгоритма линейной фильтрации определяется как

$$E_{x/\hat{x}}^{(k)}(i) = \sum_{\mu=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} R_x(\mu, \nu)[L_\mu^{(k)}(i) - f_\mu^{(k)}(i)][L_\nu^{(k)}(i) - f_\nu^{(k)}(i)] +$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} R_y(\mu, \nu) L_\mu^{(k)}(i) L_\nu^{(k)}(i) + D_x^{(k)}(i), \ i = \overline{k+1, I}. \tag{33}$$

Дополнительное снижение погрешности прогноза возможно за счет использования в операции фильтрации полиномиального алгоритма экстраполяции (15), 16), в котором учтены нелинейные свойства исследуемого случайного процесса. Несмещенную оценку неизвестной величины $x(\mu)$, рассматриваемую как взвешенное среднее результата прогноза на μ-й шаг $m_{\hat{x}}^{(k, N-1)}(1, \mu)$ и результата μ-го измерения $z(\mu)$, запишем как

$$\hat{x}(\mu) = (1 - F^{(\mu)}) m_{\hat{x}}^{(k,N-1)}(1, \mu) + F^{(\mu)} z(\mu), \ \mu = \overline{1, k}. \tag{34}$$

ISSN 0572-2691

Последовательной подстановкой с использованием оценки (34) алгоритм экстраполяции (15) приводится к виду

$$m_{\hat{x}}^{(\mu,l)}(h,i)=\begin{cases}0, & \mu=0;\\ m_{\hat{x}}^{(\mu,l-1)}(h,i)+F^{(\mu)}(z^h(\mu)-m_{\hat{x}}^{(\mu,l-1)}(l,\mu))\varphi_{h\mu}^{(l)}(i), & l\neq 1,\\ m_{\hat{x}}^{(\mu,N-1)}(h,i)+F^{(\mu)}(z^h(\mu)-m_{\hat{x}}^{(\mu-1,N-1)}(l,\mu))\varphi_{h\mu}^{(1)}(i), & l=1.\end{cases} \quad (35)$$

Алгоритм (35) имеет эквивалентную явную форму записи

$$m_x^{(k,N-1)}(1,i)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{N-1}z^{\nu}(j)\,G_{((j-1)(N-1)+\nu)}^{(k(N-1))}((i-1)(N-1)+1), \quad (36)$$

где

$$G_{\lambda}^{(\alpha)}(\xi)=\begin{cases}G_{\lambda}^{(\alpha-1)}(\xi)-G_{\lambda}^{(\alpha-1)}(\alpha)\gamma_k(i), & \lambda\leq\alpha-1;\\ \gamma_{\alpha}(\xi), & \lambda=\alpha;\end{cases} \quad (37)$$

$$\gamma_{\alpha}(\xi)=\begin{cases}F^{([\alpha/(N-1)]+1)}\beta_{1,[\alpha/(N-1)]+1}^{(\mathrm{mod}_{N-1}(\alpha))}([\alpha/(N-1)]+1) & \text{для}\ \ \xi\leq k(N-1),\\ F^{([\alpha/(N-1)]+1)}\beta_{1,[\alpha/(N-1)]+1}^{(\mathrm{mod}_{N-1}(\alpha))}(i), & \text{если}\ \ \xi=(i-1)(N-1)+1.\end{cases} \quad (38)$$

Оптимальные значения весовых коэффициентов определяются из условия минимума среднеквадратической погрешности фильтрации

$$E_{\phi}(k)=M[\,|\hat{X}(k)-X(k)|^2\,]=$$

$$=M\left[\left|(1-F^{(k)})\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{N-1}z^{\nu}(j)\,G_{((j-1)(N-1)+\nu)}^{(k(N-1))}((k-1)(N-1)+1)+F^{(k)}Z(k)-X(k)\right|^2\right]. \quad (39)$$

После дифференцирования этого выражения по $F^{(k)}$ и решения соответствующего уравнения получаем выражение для расчета оптимального значения коэффициента

$$F^{(k)}=\frac{F_1^{(k)}+F_2^{(k)}-F_3^{(k)}}{F_1^{(k)}+F_2^{(k)}-2F_3^{(k)}+D_y(k)}, \quad (40)$$

где

$$F_1^{(k)}=D_x(k)-2\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{\nu=1}^{N-1}M[x^{\nu}(j)x(k)]\,G_{((j-1)(N-1)+\nu)}^{((k-1)(N-1))}((k-1)(N-1)+1)+$$

$$+\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{\nu=1}^{N-1}\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{\mu=1}^{N-1}M[x^{\nu}(j)x^{\mu}(l)]\,G_{((j-1)(N-1)+\nu)}^{((k-1)(N-1))}((k-1)(N-1)+1)\times$$

$$\times G_{((l-1)(N-1)+\mu)}^{((k-1)(N-1))}((k-1)(N-1)+1);$$

$$F_2^{(k)}=\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{\nu=1}^{N-1}\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{\mu=1}^{N-1}M[y^{\nu}(j)y^{\mu}(l)]G_{((j-1)(N-1)+\nu)}^{((k-1)(N-1))}((k-1)(N-1)+1)\times$$

$$\times G_{((l-1)(N-1)+\mu)}^{((k-1)(N-1))}((k-1)(N-1)+1);$$

$$F_3^{(k)}=\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{\nu=1}^{N-1}M[y^{\nu}(j)y(k)]\,G_{((j-1)(N-1)+\nu)}^{((k-1)(N-1))}((k-1)(N-1)+1).$$

Каждый элемент формулы (40) имеет очевидный физический смысл. В частности, слагаемое $F_1^{(k)}$ определяет вклад в результирующую погрешность, вносимый стохастической природой процесса $X(t)$, слагаемые $F_2^{(k)}$ и $F_3^{(k)}$ связаны с погрешностями прошлых измерений, а слагаемое $D_y(k)$ — это дисперсия последнего измерения.

Алгоритм (35), (36), базирующийся на априорной $M[X^{\lambda}(\nu)X^{h}(i)]$, λ, $h=\overline{1,N}$, и апостериорной $z(j)$, $j=\overline{1,k}$, информации обеспечивает минимум среднеквадратической ошибки прогноза при данном объеме известной информации об исследуемом случайном процессе, так как два взаимосвязанных последовательных этапа (фильтрация–экстраполяция) решения данной задачи выполняются оптимальным образом: весовые коэффициенты оценки (34) определяются из условия минимума среднеквадратической ошибки приближения к истинным значениям и параметры экстраполятора на этапе предварительной фильтрации и последующего предсказания оптимальны, что было доказано ранее в теореме.

Следует отметить, что, несмотря на относительную громоздкость выражений алгоритм (35), (36) достаточно прост в вычислительном отношении, так как все параметры могут быть определены предварительно до решения задачи прогноза. В то же время при необходимости сокращения расчетов возможно (хотя и в ущерб точности) введение упрощающих предположений. Так, полагая погрешности измерений некоррелированными $M[Y^{\nu}(i), Y^{\mu}(j)]=0$, $i\neq j, i, j=\overline{1,I}$, получаем

$$F_3'^{(k)}=0,\ \ F_2'^{(k)}=\sum_{j=1}^{k-1}D_y(j)\{G_{((j-1)(N-1)+1)}^{((k-1)(N-1))}((k-1)(N-1)+1)\}^2,$$

откуда

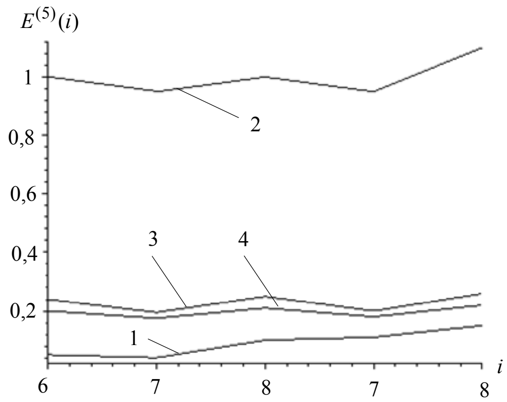
$$F'^{(k)}=\frac{F_1^{(k)}+F_2'^{(k)}}{F_1^{(k)}+F_2'^{(k)}+D_y(k)}. \tag{41}$$

Среднеквадратическая погрешность экстраполяции с использованием алгоритма полиномиальной фильтрации (35), (36) определяется как

$$\begin{aligned}E_{x/\hat{x}}^{(k)}(i)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{N-1}\sum_{l=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{N-1}M[x^{\nu}(j)x^{\mu}(l)]\{G_{((j-1)(N-1)+\nu)}^{(k(N-1))}((i-1)(N-1)+1)-\\ -S_{((j-1)(N-1)+\nu)}^{(k(N-1))}((i-1)(N-1)+1)\}\{G_{((l-1)(N-1)+\mu)}^{(k(N-1))}((i-1)(N-1)+1)-\\ -S_{((l-1)(N-1)+\mu)}^{(k(N-1))}((i-1)(N-1)+1)\}+\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{N-1}\sum_{l=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{N-1}M[y^{\nu}(j)y^{\mu}(l)]\times\\ \times G_{((j-1)(N-1)+\nu)}^{(k(N-1))}((i-1)(N-1)+1)\times\\ G_{((l-1)(N-1)+\mu)}^{(k(N-1))}((i-1)(N-1)+1)+D_x^{(k)}(i),\ \ i=\overline{k+1,I}.\end{aligned} \tag{42}$$

Таким образом, получен полиномиальный алгоритм оптимальной экстраполяции случайного процесса с фильтрацией погрешностей измерений, не накладывающий существенных ограничений на класс исследуемых случайных процессов (линейность, марковость, стационарность, монотонность и т.д.).

Полученные результаты иллюстрируются на основе решения задачи экстраполяции для случайного процесса $X(t)$, сформированного моделированием значений в дискретном ряде точек t_i, $i = \overline{1, 10}$. Процессы $X(t)$ и $Y(t)$ независимы, с нулевыми математическими ожиданиями и моментными функциями $M[X^{\lambda}(\nu)X^{h}(i)] = e^{-0,01|(\lambda+h)(i-\nu)|}$, $\lambda, h = \overline{1, 5}$, $\nu, i = \overline{1, 10}$, и $M[Y(\nu)Y(i)] = e^{-0,001|i-\nu|}$, $\nu, i = \overline{1, 10}$. Первые пять точек каждой реализации предполагались известными, а на весь остальной интервал осуществлялась экстраполяция каждым из рассмотренных методов. Из 200 таких эксперименов вычислены оценки среднеквадратической ошибки экстраполяции $E^{(5)}(i)$. Соответствующие зависимости приведены на рисунке.



Кривая 1 получена для алгоритма идеального прогноза (15), (16). Данный алгоритм обеспечивает абсолютный минимум среднеквадратической ошибки экстраполяции, равный дисперсии апостериорного процесса.

Кривая 2 отражает среднеквадратическую ошибку для алгоритма (21), (22). Наихудший результат объясняется отсутствием в данном алгоритме какой-либо предварительной обработки результатов измерений.

Кривая 3 соответствует алгоритму (29), (30). Введение операции линейной фильтрации привело к существенному уменьшению ошибки экстраполяции.

Кривая 4 получена для алгоритма (35), (36). Использование на этапе обработки результатов измерений полной априорной информации об исследуемом случайном процессе привело к дополнительному выигрышу в точности.

Таким образом, результаты эксперимента подтверждают теоретические исследования.

І.П. Атаманюк

ОПТИМАЛЬНА ПОЛІНОМІАЛЬНА ЕКСТРАПОЛЯЦІЯ РЕАЛІЗАЦІЇ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ З ФІЛЬТРАЦІЄЮ ПОХИБОК ВИМІРЮВАННЯ

Отримано поліноміальний алгоритм оптимальної екстраполяції випадкового процесу з фільтрацією похибок вимірювання. Алгоритм прогнозу як і канонічний розклад, взятий за основу, не накладає ніяких суттєвих обмежень на клас випадкових процесів, що досліджується (лінійність, марковість, стаціонарність, монотонність тощо).

I.P. Atamanyuk

OPTIMUM POLYNOMIAL EXTRAPOLATION OF REALIZATION OF RANDOM PROCESS WITH A FILTRATION OF ERRORS OF MEASUREMENTS

Polynomial algorithm of optimum extrapolation of random process with a filtration of errors of measurements is obtained. The algorithm of the forecast as well the canonical decomposition put in its basis, does not impose any essential restrictions on a class of investigated random processes (linearity, Markoviety, stationarity, monotony, etc.).

1. *Оппенгейм Э.* Цифровая обработка речевых сигналов // Применение цифровой обработки сигналов / Под. ред. Э.Оппенгейма. — М. : Мир, 1980. — 550 с.
2. *Колмогоров А.Н.* Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Изв. АН СССР. Сер. Математика — 1941. — № 5. — С. 3–14.
3. *Wiener N.* The interpolation, extrapolation and smoothing of stationary time series. — N.Y. : Wiley, 1949. — 169 p.
4. *Kalman R.E., Bucy R.S.* New results in leaner filtering and prediction theory // Trans. ASME J. Basic Eng. — 1961. — **83.** — P. 95–107.
5. *Ивахненко А.Г.* Начала индуктивной теории нечетного распознавания и прогнозирования случайных процессов и событий. — Киев, 1991. — 48 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т кибернетики АН Украины; 91-32).
6. *Ивахненко А.Г.* Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. — Киев : Техніка, 1975. — 312 с.
7. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов, прогноз и управление : Пер.с анг. под ред. В.Ф. Писаренко. — М. : Мир, 1974. — 406 с.
8. *Кудрицкий В.Д.* Прогнозирующий контроль радиоэлектронных устройств. — Киев : Техника, 1982. — 168 с.
9. *Пугачев В.С.* Теория случайных функций и ее применение. — М. : Физматгиз, 1962. — 720 с.
10. *Атаманюк І.П.* Поліноміальний канонічний розклад скалярного випадкового процесу зміни параметрів радіоелектронних пристроїв // Вісник ЖІТІ. — 2000. — № 13. — С. 99–101.
11. *Атаманюк И.П.* Полиномиальный алгоритм оптимальной экстраполяции параметров стохастических систем // Управляющие системы и машины. — 2002. — № 1. — С. 16–19.
12. *Кудрицкий В.Д., Атаманюк И.П., Иващенко Е.Н.* Оптимальная линейная экстраполяция реализации случайного процесса с фильтрацией погрешностей коррелированных измерений // Кибернетика и системный анализ. — 1995. — № 1. — С. 99–107.
13. *Атаманюк И.П.* Алгоритм экстраполяции нелинейного случайного процесса на базе его канонического разложения // Там же. — 2005.-— № 2. — С. 131–139.
14. *Атаманюк И.П.* Линейный стохастический алгоритм шифрования, базирующийся на каноническом разложении случайной последовательности // Правове, нормативне та метрологічне забезпечення системи захисту інформації в Україні. — 2007. — Вип. 2(15). — С. 63–67.
15. *Атаманюк И.П.* Анализ качества линейной экстраполяции случайных процессов на базе аппарата канонических разложений // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. — 2009. — Вып. 1/6 (37). — С. 52–56.

Получено 09.12.2008
После доработки 24.02.2009