УДК 519.216

И. П. Атаманюк, канд. техн. наук
Николаевский государственный аграрный университет
(Украина, 54010, Николаев, ул. Парижской коммуны, 9,
тел. (098) 7971234, e-mail: atamanyuk_igor@mail.ru),
Ю.П. Кондратенко, д-р техн. наук
Черноморский государственный университет им. Петра Могилы
(Украина, 54003, Николаев, ул. 68 десантников, 10,
тел. (0512) 765572, e-mail: y_kondratenko@rambler.ru)

Алгоритм оптимальной нелинейной экстраполяции зашумленной случайной последовательности*

С использованием канонических разложений разработан алгоритм оптимальной нелинейной экстраполяции случайной последовательности при условии, что измерения выполнены с погрешностью.

З використанням канонічних розкладів розроблено алгоритм оптимальної нелінійної екстраполяції випадкової послідовності за умови, що вимірювання виконано з похибкою.

К л ю ч е в ы е с л о в а: случайная последовательность, каноническое разложение, экстраполяция.

Решение многих задач управления связано с необходимостью прогнозирования будущего состояния объекта управления на основе известных данных о его настоящем и прошлом состояниях. Значительное число прикладных задач прогнозирования приходится решать в условиях, когда гарантированная точность результата и минимум вычислений имеют определяющее значение, однако уже известны накопленные статистические данные. К числу таких задач в первую очередь следует отнести задачи межсамолетной навигации, где своевременность и точность прогноза позволяет предотвратить опасное развитие ситуации.

Не менее важна задача организации испытаний сложных технических объектов на надежность, когда использование накопленной информации для прогноза позволяет сократить дорогостоящий процесс испытаний и существенно повысить достоверность его результатов (аналогичные задачи возникают в медицинской диагностике и др.).

---

* Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки, молодежи и спорта Украины. Государственный регистрационный номер 0110U001832.

Изложенное определяет правомерность постановки и исследования задачи в рамках дедуктивного направления как задачи экстраполяции некоторой конкретной реализации случайной последовательности за пределы интервала ее наблюдения. Впервые задача экстраполяции в такой постановке решена в работах [1, 2] для стационарных случайных последовательностей. Затем полученное решение было преобразовано в стройную теорию линейной экстраполяции [3]. Однако присущие ему недостатки — ограничение класса исследуемых последовательностей стационарными и вычислительные сложности (так как оно получено в спектральных терминах) — ограничили область его практического применения.

Существенный прорыв в теории линейной экстраполяции представляет собой фильтр Калмана—Бюси [4], позволивший отказаться от требования стационарности и организовать процесс вычислений в наиболее удобной рекуррентной форме. Указанные преимущества обеспечили фильтрам Калмана—Бюси широчайшее практическое применение [3, 5], однако выяснилось, что и этот мощный аппарат имеет определенные ограничения, а именно: в его основе лежит предположение о том, что исследуемая последовательность порождается линейной динамической системой, возбуждаемой белым шумом, т.е. является марковской.

Поскольку реальные последовательности, как правило, обладают значительным последействием, возникла необходимость освободиться и от этих ограничений. Одно из удовлетворяющих этому требованию решений получено в [6] в предположении, что исследуемая случайная последовательность задана своим каноническим разложением [7]. Его универсальность определяется тем, что каноническое разложение существует и точно описывает в исследуемом ряде точек любую случайную последовательность с конечной дисперсией. Однако данное решение является оптимальным только в рамках линейных (корреляционных) связей.

Наиболее общей формулой для решения задач нелинейного прогнозирования является полином Колмогорова—Габора, который позволяет учесть произвольное число измерений случайной последовательности и порядок нелинейности. Однако его практическое использование ограничено в связи с существенными трудностями определения параметров экстраполятора (например, для 12 измерений и четвертого порядка нелинейности необходимо получить 1819 выражений частных производных среднего квадрата погрешности экстраполяции). Таким образом, несмотря на указанное разнообразие решений, потребность в быстродействующих, робастных и максимально точных алгоритмах и устройствах прогноза остается весьма актуальной.

Постановка задачи. Предположим, что в результате предварительных экспериментальных исследований для моментов времени t_i, $i \ \overline{1,I}$ (необязательно с постоянным шагом дискретности), получено множество реализаций некоторой случайной последовательности $\{X\}$. На основе данной информации по известным формулам математической статистики определены дискретизированные моментные функции

$$M\,[X^{\ \ l}(i\quad p_{l\ \ 1})\,X^{\ \ l\ \ 1}(i\quad p_{l\ \ 2})\ldots X^{\ \ 2}(i\quad p_1)\,X^{\ \ 1}(i)],$$

$$\overset{l}{\underset{j\ \ 1}{\quad}}\ {}_{j}\quad L,\quad p_j\quad \overline{1, i\ \ 1},\ \ i\quad \overline{1, I}.$$

Случайная последовательность описывает, например в исследуемом ряде точек t_i, $i\quad \overline{1, I}$, изменение параметра некоторого технического объекта. В процессе эксплуатации контролируемый параметр измеряется с некоторой погрешностью и в результате наблюдается случайная последовательность $\{Z\}$:

$$Z(\quad, t_i)\quad X(\quad, t_i)\quad Y(\quad, t_i),\ i\quad \overline{1, I}, \tag{1}$$

где — элементарное событие, принадлежащее некоторой области ; $Y(\quad, t_i)$ — случайная последовательность погрешностей измерения. Тогда

$$M\,[Y^{\ \ l}(i\quad p_{l\ \ 1})\,Y^{\ \ l\ \ 1}(i\quad p_{l\ \ 2})\ldots Y^{\ \ 2}(i\quad p_1)\,Y^{\ \ 1}(i)],$$

$$\overset{l}{\underset{j\ \ 1}{\quad}}\ {}_{j}\quad L,\quad p_j\quad \overline{1, i\ \ 1},\ \ i\quad \overline{1, I}.$$

Положим, что в результате ряда последовательных измерений получены $k\quad I$ первых значений $Z(v)\quad z(v)$, $v\quad \overline{1, k}$, конкретной реализации последовательности $\{Z\}$. На основе этой информации и указанных ранее априорных сведений требуется получить оптимальную в среднеквадратическом смысле нелинейную оценку $\hat{X}(i)$, $i\quad \overline{k\ \ 1, I}$, будущих значений соответствующей реализации ненаблюдаемой случайной последовательности $\{X\}$.

На класс прогнозируемых последовательностей накладывается только ограничение конечности дисперсии.

Решение. Наиболее универсальное решение задачи нелинейного прогнозирования относительно ограничений, накладываемых на исследуемую случайную последовательность $\{X\}$, получено в [8] при условии, что измерения $z(v)$, $v\quad \overline{1, k}$, не содержат погрешностей ($z(v)\quad x(v)$, $v\quad \overline{1, k}$):

$$m_x^{(\ \ 1\cdots\ \ \ n\ \ 1;\ \ \ 1\cdots\ \ \ n,\ v)}(b_1\ldots b_{m\ \ 1}; a_1\ldots a_m, i)$$

$$
\begin{aligned}
& M\,[X^{a_m}(i \quad b_{m\ 1})\ldots X^{a_1}(i)], v \quad 0,\\
& m_x^{(\ 1\ldots\ \ n\ 1;\ \ 1\ldots\ \ n,\, v)}(b_1\ldots b_{m\ 1}; a_1\ldots a_m, v)] \quad [x^{a_n}(v \qquad n\ 1)\ldots x^{\ \ 1}(v)\\
& \quad m_x^{(\ 1\ldots\ \ n\ 1;\ \ 1\ldots\ \ n,\, v)}(\ \ 1\ldots\ \ n\ 1;\ \ 1\ldots\ \ n, v)] \quad {}^{(b_1\ldots b_{m\ 1}; a_1\ldots a_m)}_{\ 1\ldots\ \ n\ 1;\ \ 1\ldots\ \ n}(v, i),\\
& \text{если} \quad {}^{*}_{1}\ldots{}^{*}_{n\ 1};\ {}^{*}_{1}\ldots{}^{*}_{n} \quad 0,\\
& m_x^{(p_1^{(n\ 1)}\ldots p_{n\ 2}^{(n\ 1)};\ {}_1^{(n\ 1)}\ldots\ {}_{n\ 1}^{(n\ 1)},\, v)}(b_1\ldots b_{m\ 1}; a_1\ldots a_m, i) \quad [x^{a_n}(v \qquad n\ 1)\ldots x^{\ \ 1}(v)\\
& \quad m_x^{(p_1^{(n\ 1)}\ldots p_{n\ 2}^{(n\ 1)};\ {}_1^{(n\ 1)}\ldots\ {}_{n\ 1}^{(n\ 1)},\, v)}(\ \ 1\ldots\ \ n\ 1;\ \ 1\ldots\ \ n, v)] \quad {}^{(b_1\ldots b_{m\ 1}; a_1\ldots a_m)}_{\ 1\ldots\ \ n\ 1;\ \ 1\ldots\ \ n}(v, i),\\
& \text{если} \quad {}^{*}_{1}\ldots{}^{*}_{n\ 1};\ {}^{*}_{1}\ldots{}^{*}_{n} \quad 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Выражение

$$
m_x^{(\ 1\ldots\ \ n\ 1;\ \ 1\ldots\ \ n,\, v)}(b_1\ldots b_{m\ 1}; a_1\ldots a_m, i)
$$

$$
M\,[X^{a_m}(i \quad b_{m\ 1})\ldots X^{a_1}(i)/x^{\ \ {}^{(1)}_{1}}(1),\ldots, x^{\ \ {}^{(1)}_{1}}(v),
$$

где ${}_1^{(1)} \quad \overline{1, L};\ x^{\ {}_l^{(l)}}(j \quad p_{l\ 1}^{(l)})\ldots x^{\ {}_1^{(1)}}(j),\ j \quad \overline{2, v\ \ 1},\ l \quad \overline{2, M(j)};\ x^{\ {}_l^{(l)}}(v \quad p_{l\ 1}^{(l)})\ldots$ $\ldots x^{\ {}_1^{(1)}}(v),\ l \quad \overline{2, n\ \ 1},\ p_1^{(l)} \quad \overline{1, p_1^{\ (l)}}, \ldots, p_{l\ 1}^{(l)} \quad \overline{p_{l\ 2}^{(l)} \quad 1, p_{l\ 1}^{(l)}};\ \ {}_1^{(l)} \quad \overline{1, \ \ {}_1^{(l)}}, \ldots\ \ {}_l^{(l)}$ $\overline{1, \ \ {}_l^{(l)}};\ x^{\ {}_n^{(n)}}(v \quad p_{n\ 1}^{(n)})\ldots x^{\ {}_1^{(n)}}(v),\ p_1^{(n)} \quad \overline{1, p_1^{*(n)}}, \ldots, p_{n\ 1}^{(n)} \quad \overline{p_{n\ 2}^{(n)} \quad 1, p_{n\ 1}^{*(l)}};\ \ {}_1^{(n)}$ $\overline{1, \ \ {}_1^{*(n)}}, \ldots, \ {}_n^{(n)} \quad \overline{1, \ \ {}_n^{*(n)}};\ x^{\ \ n}(v \qquad n\ 1)\ldots x^{\ \ 1}(v)]$ для ${}_1 \quad p_1^{(N)}, \ldots, \ {}_{L\ 1} \quad p_{L\ 1}^{(L)};$ ${}_1 \quad {}_1^{(L)}, \ldots, \ {}_L \quad {}_L^{(L)}$ и $m \quad 1,\ \ {}_1 \quad 1$, является условным математическим ожиданием исследуемой случайной последовательности $\{X\}$ при условии, что в дискретном ряде точек $t_j,\ j \quad \overline{1, v}$, случайная последовательность принимает фиксированные значения $X(j) \quad x(j),\ j \quad \overline{1, v}$.

Алгоритм (2) основан на каноническом разложении [9] прогнозируемой последовательности:

$$
X(i) \quad M\,[X(i)] \ \sum_{v\ 1}^{i}\ \sum_{{}_1^{(1)}\ 1}^{L} V_{\ {}_1^{(1)}}(v) \quad {}^{(l)}_{\ {}_1^{(1)}}(v, i) \ \sum_{v\ 2}^{i}\ \sum_{l\ 2}^{M(v)}\ \sum_{p_1^{(l)}\ 1}^{p_1^{(l)}} \ldots
$$

$$
\ldots \sum_{p_{l\ 1}^{(l)}\ \ p_{l\ 2}^{(l)}\ 1}^{p_{l\ 1}^{(l)}}\ \sum_{{}_1^{(l)}\ 1}^{{}_1^{(l)}} \ldots \sum_{{}_l^{(l)}\ 1}^{{}_l^{(l)}} V_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ {}_1^{(l)}\ \ {}_l^{(l)}}(v) \quad {}^{(l)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ {}_1^{(l)}\ \ {}_l^{(l)}}(v, i),\ i \quad \overline{1, I}. \tag{3}
$$

где

$$M(v) \quad \begin{cases} v, \text{ если } v \quad L; \\ L, \text{ если } v \quad L; \end{cases}$$

$$p_j^{(l)} \quad \begin{cases} 0, \qquad \text{если } j \quad \overline{1, l \quad 1} \text{ или } l \quad 1; \\ v \quad l \quad j, \text{ если } j \quad \overline{1, l \quad 1}, l \quad 1; \end{cases}$$

$$^{(l)} \quad L \quad l \quad \overset{1}{\underset{j\ 1}{}} \quad {}^{(l)}_{j}, \qquad \overline{1, l}.$$

Случайные коэффициенты канонического представления (3) определяются соотношениями

$$V_{\ 1}(v) \quad X^{\ 1}(v) \quad M[X^{\ 1}(v)] \quad \overset{v\ 1 \quad L}{\underset{1 \ \ {}^{(1)}_{1}\ 1}{}} V_{\ {}^{(1)}_{1}}(\ ) \quad {}^{(1)}_{\ {}^{(1)}_{1}}(\ , v)$$

$$\overset{\ 1 \ 1}{\underset{{}^{(1)}_{1}\ 1}{}} V_{\ {}^{(1)}_{1}}(v) \quad {}^{(\ 1)}_{\ {}^{(1)}_{1}}(v, v) \quad \overset{v\ 1 \ \ M(\ ) \ \ p_1^{(l)}}{\underset{2 \quad l\ 2 \ \ p_1^{(l)}\ 1}{}} \ \ldots \ \overset{p_{l\ 1}^{(l)}}{\underset{p_{l\ 1}^{(l)} \ \ p_{l\ 2}^{(l)}\ 1}{}} \quad \overset{{}^{(l)}_{1}}{\underset{{}^{(l)}_{1}\ 1}{}} \ \ldots$$

$$\ldots \overset{{}^{(l)}_{l}}{\underset{{}^{(l)}_{l}\ 1}{}} V_{p_1^{(l)} \ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ {}^{(l)}_{1} \quad {}^{(l)}_{l}}(\ ) \quad {}^{(\quad)}_{p_1^{(l)} \ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ {}^{(l)}_{1} \quad {}^{(l)}_{l}}(\ , v), \ \ v \quad \overline{1, I};$$

$$V_{\ 1 \ldots \ \ n\ 1;\ \ 1 \ldots \ \ n}(v) \quad M[X^{\ n}(v \qquad {}_{n\ 1}) \ldots X^{\ 1}(v)]$$

$$M[X^{\ n}(v \qquad {}_{n\ 1}) \ldots X^{\ 1}(v)] \quad \overset{v\ 1 \quad L}{\underset{1 \ \ {}^{(1)}_{1}\ 1}{}} V_{\ {}^{(1)}_{1}}(\ ) \quad {}^{(\ 1 \ldots \ \ n\ 1;\ \ 1 \ldots \ \ n)}_{\ {}^{(1)}_{1}}(\ , v)$$

$$\overset{v\ 1 \ \ M(\ ) \ \ p_1^{(l)}}{\underset{2 \quad l\ 2 \ \ p_1^{(l)}\ 1}{}} \ \ldots \ \overset{p_{l\ 1}^{(l)}}{\underset{p_{l\ 1}^{(l)} \ \ p_{l\ 2}^{(l)}\ 1}{}} \quad \overset{{}^{(l)}_{1}}{\underset{{}^{(l)}_{1}\ 1}{}} \ \ldots \ \overset{{}^{(l)}_{l}}{\underset{{}^{(l)}_{l}\ 1}{}} V_{p_1^{(l)} \ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ {}^{(l)}_{1} \quad {}^{(l)}_{l}}(\ ) \quad {}^{(\ 1 \ldots \ \ n\ 1;\ \ 1 \ldots \ \ n)}_{p_1^{(l)} \ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ {}^{(l)}_{1} \quad {}^{(l)}_{l}}(\ , v)$$

$$\overset{n\ 1 \ \ p_1^{(l)}}{\underset{l\ 2 \ \ p_1^{(l)}\ 1}{}} \ \ldots \ \overset{p_{l\ 1}^{(l)}}{\underset{p_{l\ 1}^{(l)} \ \ p_{l\ 2}^{(l)}\ 1}{}} \quad \overset{{}^{(l)}_{1}}{\underset{{}^{(l)}_{1}\ 1}{}} \ \ldots \ \overset{{}^{(l)}_{l}}{\underset{{}^{(l)}_{l}\ 1}{}} V_{p_1^{(l)} \ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ {}^{(l)}_{1} \quad {}^{(l)}_{l}}(v) \quad {}^{(\ 1 \ldots \ \ n\ 1;\ \ 1 \ldots \ \ n)}_{p_1^{(l)} \ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ {}^{(l)}_{1} \quad {}^{(l)}_{l}}(v, v)$$

$$\overset{p_1^{*(n)}}{\underset{p_1^{(n)}\ 1}{}} \ \ldots \ \overset{p_{n\ 1}^{*(n)}}{\underset{p_{n\ 1}^{(n)} \ \ p_{n\ 2}^{(n)}\ 1}{}} \quad \overset{{}^{*(n)}_{1}}{\underset{{}^{(n)}_{1}\ 1}{}} \ \ldots \ \overset{{}^{*(n)}_{n}}{\underset{{}^{(n)}_{n}\ 1}{}} V_{p_1^{(n)} \ldots p_{n\ 1}^{(n)};\ {}^{(n)}_{1} \quad {}^{(n)}_{n}}(v) \quad {}^{(\ 1 \ldots \ \ n\ 1;\ \ 1 \ldots \ \ n)}_{p_1^{(n)} \ldots p_{n\ 1}^{(n)};\ {}^{(n)}_{1} \quad {}^{(n)}_{n}}(v, v), \ v \quad \overline{1, I},$$

где

$$p^{*(n)} \quad {}^{*}, \quad \text{если} \quad =1 \text{ или } p^{(n)}_{1} \quad {}^{*}_{1}, \quad =\overline{2, n},$$
$$v \quad n \quad, \text{если } p^{(n)}_{1} \quad {}^{*}_{1}, \quad =\overline{2, n};$$

$$^{*}_{i}, \qquad \text{если } i=1 \text{ или } {}^{(n)}_{i\ 1} \quad {}^{*}_{i\ 1}, \ i=\overline{2, n};$$
$${}^{*(n)}_{i} \qquad N \quad n \quad i \sum_{j\ 1}^{i\ 1} {}^{(n)}_{j}, \text{если } {}^{(n)}_{i\ 1} \quad {}^{*}_{i\ 1}, \ i=\overline{2, n}.$$

Значения *, $=\overline{1, n\ \ 1}$, и ${}^{*}_{i}$, $i=\overline{1, n}$, являются индексами случайного коэффициента $V_{\dots\ n\ 1;\ \dots\ n}(v)$, который предшествует $V_{1\dots\ n\ 1;\ 1\dots\ n}(v)$ в каноническом разложении (3) для момента времени t_v:

1) * , $=\overline{1, n\ \ 1}$, ${}^{*}_{i}$ $_{i}$, $i=\overline{1, k\ \ 1}$, ${}^{*}_{k}$ $_{k}$ 1, ${}^{*}_{j}$ $L \quad n \quad j \sum_{m\ 1}^{j\ 1} {}^{*}_{m}$, $j=\overline{k\ \ 1}$, если $_{k}$ 1, $_{j}$ 1, $j=\overline{k\ \ 1, n}$;

2) * , $=\overline{1, k\ \ 1}$, ${}^{*}_{k}$ $_{k}$ 1, ${}^{*}_{j}$ $v \quad n \quad j$, $j=\overline{k\ \ 1, n\ \ 1}$, ${}^{*}_{i}$ $L \quad n \quad i \sum_{m\ 1}^{j\ 1} {}^{*}_{m}$, $i=\overline{1, n}$, если $_{i}$ 1, $i=\overline{1, n}$, $_{k}$ $_{k\ 1}$ 1, $_{j}$ $_{j\ 1}$ 1, $j=\overline{k\ \ 1, n\ \ 1}$;

3) * 0, ${}^{*}_{i}$ 0, $V_{\dots\ n\ 1;\ \dots\ n}(v)$ 0, если , $=\overline{1, n\ \ 1}$, $_{i}$ 1, $i=\overline{1, n}$.

Выражения для определения дисперсий случайных коэффициентов имеют следующий вид:

$$D_{1}(v) \quad M[X^{2}\ {}^{1}(v)] \quad M^{2}[X\ {}^{1}(v)] \sum_{1}^{v\ 1} \sum_{{}^{(1)}_{1}\ 1}^{L} D_{{}^{(1)}_{1}}(\ )\{\ {}^{(\ 1)}_{{}^{(1)}_{1}}(\ , v)\}^{2}$$

$$\sum_{{}^{(1)}_{1}\ 1}^{1\ 1} D_{{}^{(1)}_{1}}(v)\{\ {}^{(\ 1)}_{{}^{(1)}_{1}}(v, v)\}^{2} \sum_{2}^{v\ 1} \sum_{l\ 2}^{M(\ )} \sum_{p_1^{(l)}\ 1}^{p_1^{(l)}} \dots$$

$$\dots \sum_{p_{l\ 1}^{(l)}\ p_{l\ 2}^{(l)}\ 1}^{p_{l\ 1}^{(l)}} \sum_{{}^{(l)}_{1}\ 1}^{{}^{(l)}_{1}} \dots \sum_{{}^{(l)}_{l}\ 1}^{{}^{(l)}_{l}} D_{p_1^{(l)}\dots p_{l\ 1}^{(l)};\ {}^{(l)}_{1}\ \ {}^{(l)}_{l}}(\ )\{\ {}^{(\ )}_{p_1^{(l)}\dots p_{l\ 1}^{(l)};\ {}^{(l)}_{1}\ \ {}^{(l)}_{l}}(\ , v)\}^{2}, \quad v \quad \overline{1, I};$$

$$D_{1\dots\ n\ 1;\ 1\dots\ n}(v) \quad M[X^{2}\ {}^{n}(v \quad {}_{n\ 1})\dots X^{2}\ {}^{1}(v)]$$

$$M^{2}[X\ {}^{n}(v \quad {}_{n\ 1})\dots X\ {}^{1}(v)] \sum_{1}^{v\ 1} \sum_{{}^{(1)}_{1}\ 1}^{L} D_{{}^{(1)}_{1}}(\ )\{\ {}^{(1\dots\ n\ 1;\ 1\dots\ n)}_{{}^{(1)}_{1}}(\ , v)\}^{2}$$

$$v\ 1\ M(\ )\ \sum_{p_1^{(l)}\ 2\ \ l\ 2}\ldots\sum_{p_{l\ 1}^{(l)}\ p_1^{(l)}\ 1}\ \sum_{\ 1^{(l)}\ p_{l\ 1}^{(l)}\ p_{l\ 2}^{(l)}\ 1}\ldots\sum_{\ l^{(l)}\ \ 1^{(l)}\ 1\ \ l^{(l)}\ 1} D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ \ 1^{(l)}\ \ \ l^{(l)}}(\ )\{\ {}^{(\ 1\ldots\ \ n\ 1;\ \ 1\ldots\ \ n)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ \ 1^{(l)}\ \ \ l^{(l)}}(\ ,v)\}^2$$

$$n\ 1\ \sum_{p_1^{(l)}\ l\ 2}\ldots\sum_{p_{l\ 1}^{(l)}\ p_1^{(l)}\ 1}\ \sum_{\ 1^{(l)}\ p_{l\ 1}^{(l)}\ p_{l\ 2}^{(l)}\ 1}\ldots\sum_{\ l^{(l)}\ \ 1^{(l)}\ 1\ \ l^{(l)}\ 1} D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ \ 1^{(l)}\ \ \ l^{(l)}}(v)\{\ {}^{(\ 1\ldots\ \ n\ 1;\ \ 1\ldots\ \ n)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ \ 1^{(l)}\ \ \ l^{(l)}}(v,v)\}^2$$

$$\sum_{p_1^{(n)}\ 1}^{p_1^{*(n)}}\ldots\sum_{p_{l\ 1}^{(n)}\ p_{l\ 2}^{(n)}\ 1}^{p_{n\ 1}^{*(n)}}\ \sum_{\ 1^{(n)}\ 1}^{\ 1^{*(n)}}\ldots\sum_{\ n^{(n)}\ 1}^{\ n^{*(n)}} D_{p_1^{(n)}\ldots p_{n\ 1}^{(n)};\ \ 1^{(n)}\ \ \ n^{(n)}}(v)\{\ {}^{(\ 1\ldots\ \ n\ 1;\ \ 1\ldots\ \ n)}_{p_1^{(n)}\ldots p_{n\ 1}^{(n)};\ \ 1^{(n)}\ \ \ n^{(n)}}(v,v)\}^2,$$

$$v\quad \overline{1,I}.$$

Координатные функции канонического разложения (3) определяются соотношениями

$$\ {}^{(b_1\ldots\ b_{m\ 1};\,a_1\ldots\ a_m)}_{\ 1}(v,i)\quad M[X\ \ ^1(v)\,X^{a_m}(i\quad b_{m\ 1})\ldots X^{a_1}(i)]$$

$$M[X\ \ ^1(v)]\,M[X^{a_m}(i\quad b_{m\ 1})\ldots X^{a_1}(i)]$$

$$\sum_{1}^{v\ 1}\ \sum_{\ 1^{(1)}\ 1}^{L} D_{\ 1^{(1)}}(\ )\ \ {}^{(\ \ 1)}_{\ 1^{(1)}}(\ ,v)\ \ {}^{(b_1\ldots\ b_{m\ 1};\,a_1\ldots\ a_m)}_{\ 1^{(1)}}(\ ,i)$$

$$\sum_{\ 1^{(1)}\ 1}^{\ 1\ 1} D_{\ 1^{(1)}}(v)\ \ {}^{(\ \ 1)}_{\ 1^{(1)}}(v,v)\ \ {}^{(b_1\ldots\ b_{m\ 1};\,a_1\ldots\ a_m)}_{\ 1^{(1)}}(v,i)\quad \sum_{2\ \ l\ 2}^{v\ 1\ M(\ )}\ \sum_{p_1^{(l)}\ 1}^{p_1^{(l)}}\ldots\sum_{p_{l\ 1}^{(l)}\ p_{l\ 2}^{(l)}\ 1}^{p_{l\ 1}^{(l)}}\ \sum_{\ 1^{(l)}}^{\ 1^{(l)}}\ldots$$

$$\ldots\sum_{\ l^{(l)}}^{\ l^{(l)}} D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ \ 1^{(l)}\ \ \ l^{(l)}}(\ )\ \ {}^{(\ \ 1)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ \ 1^{(l)}\ \ \ l^{(l)}}(\ ,v)\ \ {}^{(b_1\ldots\ b_{m\ 1};\,a_1\ldots\ a_m)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ \ 1^{(l)}\ \ \ l^{(l)}}(\ ,v),\ v\quad \overline{1,I};$$

$$\ {}^{(b_1\ldots\ b_{m\ 1};\,a_1\ldots\ a_m)}_{\ 1\ldots\ \ n\ 1;\ \ 1\ldots\ \ n}(v,i)\quad \frac{1}{D_{\ 1\ldots\ \ n\ 1;\ \ 1\ldots\ \ n}}\{M[X\ \ ^n(v\qquad _{n\ 1})\ldots$$

$$\ldots X\ \ ^1(v)\,X^{a_m}(i\quad b_{m\ 1})\ldots X^{a_1}(i)]$$

$$M[X\ \ ^n(v\qquad _{n\ 1})\ldots X\ \ ^1(v)]\,M[X^{a_m}(i\quad b_{m\ 1})\ldots X^{a_1}(i)]$$

$$\sum_{1}^{v\ 1}\ \sum_{\ 1^{(1)}\ 1}^{K} D_{\ 1^{(1)}}(\ )\ \ {}^{(\ \ 1)}_{\ 1^{(1)}}(\ ,v)\ \ {}^{(b_1\ldots\ b_{m\ 1};\,a_1\ldots\ a_m)}_{\ 1^{(1)}}(\ ,i)$$

$$\sum_{v=1}^{M(\ )}\ \sum_{p_1^{(l)}=1}^{} \dots \sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{} \ \sum_{\ _1^{(l)}=1}^{} \dots \sum_{\ _l^{(l)}=1}^{} D_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\ _1^{(l)}\dots\ _l^{(l)}}(\ ) \ \ (2 \ l \ 2)$$

$$\ ^{(\ _1\dots\ _{n-1};\ _1\dots\ _n)}_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\ _1^{(l)}\dots\ _l^{(l)}}(\ ,v)\ \ ^{(b_1\dots b_{m-1};a_1\dots a_m)}_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\ _1^{(l)}\dots\ _l^{(l)}}(\ ,i) \sum_{l=2}^{n-1}\ \sum_{p_1^{(l)}=1}^{} \dots \sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{} \ \sum_{\ _1^{(l)}=1}^{} \dots$$

$$\dots \sum_{\ _l^{(l)}=1}^{} D_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\ _1^{(l)}\dots\ _l^{(l)}}(v)\ \ ^{(\ _1\dots\ _{n-1};\ _1\dots\ _n)}_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\ _1^{(l)}\dots\ _l^{(l)}}(v,v)\ \ ^{(b_1\dots b_{m-1};a_1\dots a_m)}_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\ _1^{(l)}\dots\ _l^{(l)}}(v,i)$$

$$\sum_{p_1^{(n)}=1}^{p_1^{*(n)}} \dots \sum_{p_{n-1}^{(n)}=p_{l-2}^{(n)}+1}^{p_{n-1}^{*(n)}} \ \sum_{\ _1^{(n)}=1}^{\ _1^{*(n)}} \dots \sum_{\ _n^{(n)}=1}^{\ _n^{*(n)}} D_{p_1^{(n)}\dots p_{n-1}^{(n)};\ _1^{(n)}\dots\ _n^{(n)}}(v)$$

$$\ ^{(\ _1\dots\ _{n-1};\ _1\dots\ _n)}_{p_1^{(n)}\dots p_{n-1}^{(n)};\ _1^{(n)}\dots\ _n^{(n)}}(v,v)\ \ ^{(b_1\dots b_{m-1};a_1\dots a_m)}_{p_1^{(n)}\dots p_{n-1}^{(n)};\ _1^{(n)}\dots\ _n^{(n)}}(v,i)\},\ v\ \ \overline{I}.$$

Существенным ограничением алгоритма (2) является предположение о том, что измеренные значения $x(\ )$, $\overline{1,k}$, известны абсолютно точно. Очевидно, что в реальных ситуациях это предположение никогда не выполняется и возникает задача модификации алгоритма (2) для устранения указанного недостатка.

Введем в рассмотрение «смешанную» случайную последовательность $\{X\ \}\ \ \{Z(1), Z(2),\dots, Z(k), X(k\ \ 1),\dots, X(I)\}$, сочетающую в себе результаты измерений до $i\ \ k$ и данные о последовательности $\{X\}$ при $i\ \ \overline{k\ \ 1, I}$. Для этой последовательности нелинейное каноническое разложение имеет вид

$$X(i)\ \ M[X(i)] \sum_{v=1}^{i}\ \sum_{\ _1^{(1)}=1}^{L} W_{\ _1^{(1)}}(v)\ \ ^{(1)}_{\ _1^{(1)}}(v,i) \sum_{v=2}^{i}\ \sum_{l=2}^{M(v)}\ \sum_{p_1^{(l)}=1}^{} \dots$$

$$\dots \sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{} \ \sum_{\ _1^{(l)}=1}^{} \dots \sum_{\ _l^{(l)}=1}^{} W_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\ _1^{(l)}\dots\ _l^{(l)}}(v)\ \ ^{(1)}_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\ _1^{(l)}\dots\ _l^{(l)}}(v,i),\ i\ \ \overline{1, I}. \quad (4)$$

Коэффициенты разложения (4) определяются из выражений

$$W_{\ _1}(v)\ \ Z^{\ _1}(v)\ \ M[Z^{\ _1}(v)] \sum_{\ =1}^{v-1}\ \sum_{\ _1^{(1)}=1}^{L} W_{\ _1^{(1)}}(\ )\ \ ^{(1)}_{\ _1^{(1)}}(\ ,v)$$

$$\sum_{\ _1^{(1)}=1}^{\ _1-1} W_{\ _1^{(1)}}(v)\ \ ^{(\ _1)}_{\ _1^{(1)}}(v,v) \sum_{\ =1}^{v-1}\ \sum_{l=2}^{M(\ )}\ \sum_{p_1^{(l)}=1}^{} \dots \sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{} \ \sum_{\ _1^{(l)}=1}^{} \dots$$

$$\ldots \sum_{l^{(l)}\ 1}^{l^{(l)}} W_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ 1^{(l)}\ \ l^{(l)}}(\ )\ {}^{(\ )}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ 1^{(l)}\ \ l^{(l)}}(\ ,v),\ v\ \ \overline{1,k};$$

$$W_{\ 1}(v)\ \ X^{\ 1}(v)\ \ M[X^{\ 1}(v)]\ \sum_{1\ \ 1^{(1)}\ 1}^{v\ 1\ \ L} W_{\ 1^{(1)}}(\ )\ {}^{(1)}_{\ 1^{(1)}}(\ ,v)$$

$$\sum_{1^{(1)}\ 1}^{1\ 1} W_{\ 1^{(1)}}(v)\ {}^{(\ 1)}_{\ 1^{(1)}}(v,v)\ \sum_{2\ \ l\ 2}^{v\ 1\ M(\ )} \sum_{p_1^{(l)}\ 1}^{p_1^{(l)}} \ldots \sum_{p_{l\ 1}^{(l)}\ p_{l\ 2}^{(l)}\ 1}^{p_{l\ 1}^{(l)}} \sum_{1^{(l)}\ 1}^{1^{(l)}} \ldots$$

$$\ldots \sum_{l^{(l)}\ 1}^{l^{(l)}} W_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ 1^{(l)}\ \ l^{(l)}}(\ )\ {}^{(\ )}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ 1^{(l)}\ \ l^{(l)}}(\ ,v),\ \ v\ \ \overline{k\ \ 1,I};$$

$$W_{\ 1\ldots\ \ n\ 1;\ \ 1\ldots\ \ n}(v)\ \ M[Z^{\ n}(v\ \ \ _{n\ 1})\ldots Z^{\ 1}(v)]\ \ M[Z^{\ n}(v\ \ \ _{n\ 1})\ldots Z^{\ 1}(v)]$$

$$\sum_{1\ \ 1^{(1)}\ 1}^{v\ 1\ \ L} W_{\ 1^{(1)}}(\ )\ {}^{(\ 1\ldots\ \ n\ 1;\ \ 1\ldots\ \ n)}_{\ 1^{(1)}}(\ ,v)$$

$$\sum_{2\ \ l\ 2}^{v\ 1\ M(\ )} \sum_{p_1^{(l)}\ 1}^{p_1^{(l)}} \ldots \sum_{p_{l\ 1}^{(l)}\ p_{l\ 2}^{(l)}\ 1}^{p_{l\ 1}^{(l)}} \sum_{1^{(l)}\ 1}^{1^{(l)}} \ldots \sum_{l^{(l)}\ 1}^{l^{(l)}} W_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ 1^{(l)}\ \ l^{(l)}}(\ )\ {}^{(\ 1\ldots\ \ n\ 1;\ \ 1\ldots\ \ n)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ 1^{(l)}\ \ l^{(l)}}(\ ,v)$$

$$\sum_{l\ 2}^{n\ 1} \sum_{p_1^{(l)}\ 1}^{p_1^{(l)}} \ldots \sum_{p_{l\ 1}^{(l)}\ p_{l\ 2}^{(l)}\ 1}^{p_{l\ 1}^{(l)}} \sum_{1^{(l)}\ 1}^{1^{(l)}} \ldots \sum_{l^{(l)}\ 1}^{l^{(l)}} W_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ 1^{(l)}\ \ l^{(l)}}(v)\ {}^{(\ 1\ldots\ \ n\ 1;\ \ 1\ldots\ \ n)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ 1^{(l)}\ \ l^{(l)}}(v,v)$$

$$\sum_{p_1^{(n)}\ 1}^{p_1^{*(n)}} \ldots \sum_{p_{n\ 1}^{(n)}\ p_{n\ 2}^{(n)}\ 1}^{p_{n\ 1}^{*(n)}} \sum_{1^{(n)}\ 1}^{1^{*(n)}} \ldots \sum_{n^{(n)}\ 1}^{n^{*(n)}} W_{p_1^{(n)}\ldots p_{n\ 1}^{(n)};\ 1^{(n)}\ \ n^{(n)}}(v)\ {}^{(\ 1\ldots\ \ n\ 1;\ \ 1\ldots\ \ n)}_{p_1^{(n)}\ldots p_{n\ 1}^{(n)};\ 1^{(n)}\ \ n^{(n)}}(v,v),\ v\ \ \overline{1,k};$$

$$W_{\ 1\ldots\ \ n\ 1;\ \ 1\ldots\ \ n}(v)\ \ M[X^{\ n}(v\ \ \ _{n\ 1})\ldots X^{\ 1}(v)]\ \ M[X^{\ n}(v\ \ \ _{n\ 1})\ldots X^{\ 1}(v)]$$

$$\sum_{1\ \ 1^{(1)}\ 1}^{v\ 1\ \ L} W_{\ 1^{(1)}}(\ )\ {}^{(\ 1\ldots\ \ n\ 1;\ \ 1\ldots\ \ n)}_{\ 1^{(1)}}(\ ,v)$$

$$\sum_{2\ \ l\ 2}^{v\ 1\ M(\ )} \sum_{p_1^{(l)}\ 1}^{p_1^{(l)}} \ldots \sum_{p_{l\ 1}^{(l)}\ p_{l\ 2}^{(l)}\ 1}^{p_{l\ 1}^{(l)}} \sum_{1^{(l)}\ 1}^{1^{(l)}} \ldots \sum_{l^{(l)}\ 1}^{l^{(l)}} W_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ 1^{(l)}\ \ l^{(l)}}(\ )\ {}^{(\ 1\ldots\ \ n\ 1;\ \ 1\ldots\ \ n)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ 1^{(l)}\ \ l^{(l)}}(\ ,v)$$

$$\sum_{l\ 2}^{n\ 1} \sum_{p_1^{(l)}\ 1}^{p_1^{(l)}} \ldots \sum_{p_{l\ 1}^{(l)}\ p_{l\ 2}^{(l)}\ 1}^{p_{l\ 1}^{(l)}} \sum_{1^{(l)}\ 1}^{1^{(l)}} \ldots \sum_{l^{(l)}\ 1}^{l^{(l)}} W_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ 1^{(l)}\ \ l^{(l)}}(v)\ {}^{(\ 1\ldots\ \ n\ 1;\ \ 1\ldots\ \ n)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ 1^{(l)}\ \ l^{(l)}}(v,v)$$

$$\mathop{\ldots}_{p_1^{(n)}\ 1\quad p_{n\ 1}^{(n)}\ p_{n\ 2}^{(n)}\ 1}^{p_1^{*(n)}\qquad p_{n\ 1}^{*(n)}}\ \mathop{\ldots}_{{}_1^{(n)}\ 1\quad {}_n^{(n)}\ 1}^{{}_1^{*(n)}\qquad {}_n^{*(n)}} W_{p_1^{(n)}\ldots p_{n\ 1}^{(n)};\ {}_1^{(n)}\ \ {}_n^{(n)}}(v)\ {}^{(\ _1\ldots\ _{n\ 1};\ _1\ldots\ _n)}_{p_1^{(n)}\ldots p_{n\ 1}^{(n)};\ {}_1^{(n)}\ \ {}_n^{(n)}}(v,v),$$

$$v\quad \overline{k\ \ 1, I}.$$

Соотношения для определения дисперсий случайных коэффициентов имеют следующий вид:

$$D_{\ 1}(v)\quad M[Z^2\ {}^1(v)]\quad M^2[Z\ {}^1(v)]\ \sum_{1\ {}_1^{(1)}\ 1}^{v\ 1\quad L} D_{{}_1^{(1)}}(\ )\{\ {}^{(\ _1)}_{{}_1^{(1)}}(\ ,v)\}^2$$

$$\sum_{{}_1^{(1)}\ 1}^{1\ 1} D_{{}_1^{(1)}}(v)\{\ {}^{(\ _1)}_{{}_1^{(1)}}(v,v)\}^2\ \sum_{2\ \ l\ 2\ \ p_1^{(l)}\ 1}^{v\ 1\ M(\ )\ p_1^{(l)}}\ldots$$

$$\ldots\sum_{p_{l\ 1}^{(l)}\ p_{l\ 2}^{(l)}\ 1}^{p_{l\ 1}^{(l)}}\ \sum_{{}_1^{(l)}\ 1}^{{}_1^{(l)}}\ldots\sum_{{}_l^{(l)}\ 1}^{{}_l^{(l)}} D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ {}_1^{(l)}\ \ {}_l^{(l)}}(\ )\{\ {}^{(\ \ )}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ {}_1^{(l)}\ \ {}_l^{(l)}}(\ ,v)\}^2,\ \ v\quad \overline{1,k};$$

$$D_{\ 1}(v)\quad M[X^2\ {}^1(v)]\quad M^2[X\ {}^1(v)]\ \sum_{1\ {}_1^{(1)}\ 1}^{v\ 1\quad K} D_{{}_1^{(1)}}(\ )\{\ {}^{(\ _1)}_{{}_1^{(1)}}(\ ,v)\}^2$$

$$\sum_{{}_1^{(1)}\ 1}^{1\ 1} D_{{}_1^{(1)}}(v)\{\ {}^{(\ _1)}_{{}_1^{(1)}}(v,v)\}^2\ \sum_{2\ \ l\ 2\ \ p_1^{(l)}\ 1}^{v\ 1\ M(\ )\ p_1^{(l)}}\ldots\sum_{p_{l\ 1}^{(l)}\ p_{l\ 2}^{(l)}\ 1}^{p_{l\ 1}^{(l)}}\ \sum_{{}_1^{(l)}\ 1}^{{}_1^{(l)}}\ldots$$

$$\ldots\sum_{{}_l^{(l)}\ 1}^{{}_l^{(l)}} D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ {}_1^{(l)}\ \ {}_l^{(l)}}(\ )\{\ {}^{(\ \ )}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ {}_1^{(l)}\ \ {}_l^{(l)}}(\ ,v)\}^2,\ \ v\quad \overline{k\ \ 1, I};$$

$$D_{\ _1\ldots\ _{n\ 1};\ _1\ldots\ _n}(v)\quad M[Z^2\ {}^n(v\quad {}_{n\ 1})\ldots Z^2\ {}^1(v)]\quad M^2[Z\ {}^n(v\quad {}_{n\ 1})\ldots$$

$$\ldots Z\ {}^1(v)]\ \sum_{1\ {}_1^{(1)}\ 1}^{v\ 1\quad L} D_{{}_1^{(1)}}(\ )\{\ {}^{(\ _1\ldots\ _{n\ 1};\ _1\ldots\ _n)}_{{}_1^{(1)}}(\ ,v)\}^2\ \sum_{2\ \ l\ 2\ \ p_1^{(l)}\ 1}^{v\ 1\ M(\ )\ p_1^{(l)}}\ldots$$

$$\ldots\sum_{p_{l\ 1}^{(l)}\ p_{l\ 2}^{(l)}\ 1}^{p_{l\ 1}^{(l)}}\ \sum_{{}_1^{(l)}\ 1}^{{}_1^{(l)}}\ldots\sum_{{}_l^{(l)}\ 1}^{{}_l^{(l)}} D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ {}_1^{(l)}\ \ {}_l^{(l)}}(\ )\{\ {}^{(\ _1\ldots\ _{n\ 1};\ _1\ldots\ _n)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ {}_1^{(l)}\ \ {}_l^{(l)}}(\ ,v)\}^2$$

$$\sum_{l\ 2\ \ p_1^{(l)}\ 1}^{n\ 1\ \ p_1^{(l)}}\ldots\sum_{p_{l\ 1}^{(l)}\ p_{l\ 2}^{(l)}\ 1}^{p_{l\ 1}^{(l)}}\ \sum_{{}_1^{(l)}\ 1}^{{}_1^{(l)}}\ldots\sum_{{}_l^{(l)}\ 1}^{{}_l^{(l)}} D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ {}_1^{(l)}\ \ {}_l^{(l)}}(v)\{\ {}^{(\ _1\ldots\ _{n\ 1};\ _1\ldots\ _n)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ {}_1^{(l)}\ \ {}_l^{(l)}}(v,v)\}^2$$

$$\underset{p_1^{(n)}\;1}{\overset{p_1^{*(n)}}{\ldots}}\;\underset{p_{n\;1}^{(n)}\;p_{n\;2}^{(n)}\;1}{\overset{p_{n\;1}^{*(n)}}{}}\;\underset{{}_1^{(n)}\;1}{\overset{{}_1^{*(n)}}{\ldots}}\;\underset{{}_n^{(n)}\;1}{\overset{{}_n^{*(n)}}{}}\;D_{p_1^{(n)}\ldots p_{n\;1}^{(n)};\;{}_1^{(n)}\;\;{}_n^{(n)}}(v)\{\;{}^{(\;{}_1\ldots\;{}_{n\;1};\;{}_1\ldots\;{}_n)}_{p_1^{(n)}\ldots p_{n\;1}^{(n)};\;{}_1^{(n)}\;\;{}_n^{(n)}}(v,v)\}^2,$$

$$v\quad\overline{1,k};$$

$$D_{\;{}_1\ldots\;{}_{n\;1};\;{}_1\ldots\;{}_n}(v)\quad M[X^{2\;{}_n}(v\quad{}_{n\;1})\ldots X^{2\;{}_1}(v)]\quad M^2[X^{\;{}_n}(v\quad{}_{n\;1})\ldots$$

$$\ldots X^{\;{}_1}(v)]\;\underset{1\;\;{}_1^{(1)}\;1}{\overset{v\;1\quad L}{}}\;D_{\;{}_1^{(1)}}(\;)\{\;{}^{(\;{}_1\ldots\;{}_{n\;1};\;{}_1\ldots\;{}_n)}_{\;{}_1^{(1)}}(\;,v)\}^2\;\underset{2\quad l\;2\;\;p_1^{(l)}\;1}{\overset{v\;1\;M(\;)\;p_1^{(l)}}{}}\ldots$$

$$\ldots\underset{p_{l\;1}^{(l)}\;p_{l\;2}^{(l)}\;1}{\overset{p_{l\;1}^{(l)}}{}}\;\underset{{}_1^{(l)}\;1}{\overset{{}_1^{(l)}}{\ldots}}\;\underset{{}_l^{(l)}\;1}{\overset{{}_l^{(l)}}{}}\;D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\;1}^{(l)};\;{}_1^{(l)}\;\;{}_l^{(l)}}(\;)\{\;{}^{(\;{}_1\ldots\;{}_{n\;1};\;{}_1\ldots\;{}_n)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\;1}^{(l)};\;{}_1^{(l)}\;\;{}_l^{(l)}}(\;,v)\}^2$$

$$\underset{l\;2\;\;p_1^{(l)}\;1}{\overset{n\;1\;\;p_1^{(l)}}{}}\;\underset{p_{l\;1}^{(l)}\;p_{l\;2}^{(l)}\;1}{\overset{p_{l\;1}^{(l)}}{\ldots}}\;\underset{{}_1^{(l)}\;1}{\overset{{}_1^{(l)}}{}}\;\underset{{}_l^{(l)}\;1}{\overset{{}_l^{(l)}}{\ldots}}\;D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\;1}^{(l)};\;{}_1^{(l)}\;\;{}_l^{(l)}}(v)\{\;{}^{(\;{}_1\ldots\;{}_{n\;1};\;{}_1\ldots\;{}_n)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\;1}^{(l)};\;{}_1^{(l)}\;\;{}_l^{(l)}}(v,v)\}^2$$

$$\underset{p_1^{(n)}\;1}{\overset{p_1^{*(n)}}{\ldots}}\;\underset{p_{l\;1}^{(n)}\;p_{l\;2}^{(n)}\;1}{\overset{p_{n\;1}^{*(n)}}{}}\;\underset{{}_1^{(n)}\;1}{\overset{{}_1^{*(n)}}{\ldots}}\;\underset{{}_n^{(n)}\;1}{\overset{{}_n^{*(n)}}{}}\;D_{p_1^{(n)}\ldots p_{n\;1}^{(n)};\;{}_1^{(n)}\;\;{}_n^{(n)}}(v)\{\;{}^{(\;{}_1\ldots\;{}_{n\;1};\;{}_1\ldots\;{}_n)}_{p_1^{(n)}\ldots p_{n\;1}^{(n)};\;{}_1^{(n)}\;\;{}_n^{(n)}}(v,v)\}^2,$$

$$v\quad\overline{k\quad1,I}.$$

Координатные функции канонического разложения (4) определяются с помощью выражений

$$\;{}^{(b_1\ldots b_{m\;1};\,a_1\ldots a_m)}_{1}(v,i)\quad M[Z^{\;1}(v)Z^{a_m}(i\quad b_{m\;1})\ldots Z^{a_1}(i)]$$

$$M[Z^{\;1}(v)]\,M[Z^{a_m}(i\quad b_{m\;1})\ldots X^{a_1}(i)]$$

$$\underset{1\;\;{}_1^{(1)}\;1}{\overset{v\;1\quad L}{}}\;D_{\;{}_1^{(1)}}(\;)\;\;{}^{(\;{}_1)}_{\;{}_1^{(1)}}(\;,v)\;\;{}^{(b_1\ldots b_{m\;1};\,a_1\ldots a_m)}_{\;{}_1^{(1)}}(\;,i)$$

$$\underset{{}_1^{(1)}\;1}{\overset{{}_1\;1}{}}\;D_{\;{}_1^{(1)}}(v)\;\;{}^{(\;{}_1)}_{\;{}_1^{(1)}}(v,v)\;\;{}^{(b_1\ldots b_{m\;1};\,a_1\ldots a_m)}_{\;{}_1^{(1)}}(v,i)\;\underset{2\quad l\;2\;\;p_1^{(l)}\;1}{\overset{v\;1\;M(\;)\;p_1^{(l)}}{}}\;\underset{p_{l\;1}^{(l)}\;p_{l\;2}^{(l)}\;1}{\overset{p_{l\;1}^{(l)}}{\ldots}}\;\underset{{}_1^{(l)}}{\overset{{}_1^{(l)}}{}}\ldots$$

$$\ldots\underset{{}_l^{(l)}}{\overset{{}_l^{(l)}}{}}\;D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\;1}^{(l)};\;{}_1^{(l)}\;\;{}_l^{(l)}}(\;)\;\;{}^{(\;{}_1)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\;1}^{(l)};\;{}_1^{(l)}\;\;{}_l^{(l)}}(\;,v)\;\;{}^{(b_1\ldots b_{m\;1};\,a_1\ldots a_m)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\;1}^{(l)};\;{}_1^{(l)}\;\;{}_l^{(l)}}(\;,v),\;v,i\quad k;$$

$$\;{}^{(b_1\ldots b_{m\;1};\,a_1\ldots a_m)}_{1}(v,i)\quad M[Z^{\;1}(v)\,X^{a_m}(i\quad b_{m\;1})\ldots X^{a_1}(i)]$$

$$M[Z^{\;1}(v)]\,M[X^{a_m}(i\quad b_{m\;1})\ldots X^{a_1}(i)]$$

$$\sum_{1 \quad (1) \quad 1}^{v \; 1 \quad L} D_{\;(1)}_{1}(\;)\; {}^{(\;\;1)}_{(1)\,1}(\;,v)\; {}^{(b_1\ldots\, b_{m\;1};\, a_1\ldots\, a_m)}_{(1)\,1}(\;,i)$$

$$\sum_{(1)\,1 \quad 1}^{1 \quad 1} D_{\;(1)}_{1}(v)\; {}^{(\;\;1)}_{(1)\,1}(v,v)\; {}^{(b_1\ldots\, b_{m\;1};\, a_1\ldots\, a_m)}_{(1)\,1}(v,i) \quad \sum_{2 \quad l \;2 \; p_1^{(l)} \;1}^{v \;1 \; M(\;)\; p_1^{(l)}} \ldots \sum_{p_{l\;1}^{(l)} \; p_{l\;2}^{(l)}\;1}^{p_{l\;1}^{(l)}} \sum_{1}^{(l)} \ldots$$

$$\ldots \sum_{l}^{(l)} D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\;1}^{(l)};\; {}_1^{(l)} \quad {}_l^{(l)}}(\;)\; {}^{(\;\;1)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\;1}^{(l)};\; {}_1^{(l)} \quad {}_l^{(l)}}(\;,v)\; {}^{(b_1\ldots\, b_{m\;1};\, a_1\ldots\, a_m)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\;1}^{(l)};\; {}_1^{(l)} \quad {}_l^{(l)}}(\;,v),$$

$$v \quad k, \quad i \quad b_{m\;1} \quad k;$$

$${}^{(b_1\ldots\, b_{m\;1};\, a_1\ldots\, a_m)}_{1\ldots \quad n\;1;\quad 1\ldots \quad n}(v,i)$$

$$\frac{1}{D_{\;1\ldots \quad n\;1;\quad 1\ldots \quad n}}\{M\,[Z^{\;\;n}(v \qquad {}_{n\;1})\ldots Z^{\;\;1}(v)\,Z^{a_m}(i \quad b_{m\;1})\ldots Z^{a_1}(i)]$$

$$M\,[Z^{\;\;n}(v \qquad {}_{n\;1})\ldots Z^{\;\;1}(v)]\,M\,[Z^{a_m}(i \quad b_{m\;1})\ldots Z^{a_1}(i)]$$

$$\sum_{1 \quad (1)\,1 \quad 1}^{v \; 1 \quad L} D_{\;(1)}_{1}(\;)\; {}^{(\;\;1)}_{(1)\,1}(\;,v)\; {}^{(b_1\ldots\, b_{m\;1};\, a_1\ldots\, a_m)}_{(1)\,1}(\;,i) \quad \sum_{2 \quad l \;2 \; p_1^{(l)} \;1}^{v \;1 \; M(\;)\; p_1^{(l)}} \ldots \sum_{p_{l\;1}^{(l)} \; p_{l\;2}^{(l)}\;1}^{p_{l\;1}^{(l)}} \sum_{{}_1^{(l)}\;1}^{{}_1^{(l)}} \ldots$$

$$\ldots \sum_{{}_l^{(l)}\;1}^{{}_l^{(l)}} D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\;1}^{(l)};\; {}_1^{(l)} \quad {}_l^{(l)}}(\;)\; {}^{(\;1\ldots \quad n\;1;\quad 1\ldots \quad n)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\;1}^{(l)};\; {}_1^{(l)} \quad {}_l^{(l)}}(\;,v)\; {}^{(b_1\ldots\, b_{m\;1};\, a_1\ldots\, a_m)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\;1}^{(l)};\; {}_1^{(l)} \quad {}_l^{(l)}}(\;,i) \quad \sum_{l \;2 \; p_1^{(l)} \;1}^{n \;1 \; p_1^{(l)}} \ldots$$

$$\ldots \sum_{p_{l\;1}^{(l)} \; p_{l\;2}^{(l)}\;1}^{p_{l\;1}^{(l)}} \sum_{{}_1^{(l)}\;1}^{{}_1^{(l)}} \ldots \sum_{{}_l^{(l)}\;1}^{{}_l^{(l)}} D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\;1}^{(l)};\; {}_1^{(l)} \quad {}_l^{(l)}}(v)\; {}^{(\;1\ldots \quad n\;1;\quad 1\ldots \quad n)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\;1}^{(l)};\; {}_1^{(l)} \quad {}_l^{(l)}}(v,v)$$

$${}^{(b_1\ldots\, b_{m\;1};\, a_1\ldots\, a_m)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\;1}^{(l)};\; {}_1^{(l)} \quad {}_l^{(l)}}(v,i) \quad \sum_{p_1^{(n)}\;1}^{p_1^{*(n)}} \ldots \sum_{p_{l\;1}^{(n)} \; p_{l\;2}^{(n)}\;1}^{p_{n\;1}^{*(n)}} \sum_{{}_1^{(n)}\;1}^{{}_1^{*(n)}} \ldots \sum_{{}_n^{(n)}\;1}^{{}_n^{*(n)}} D_{p_1^{(n)}\ldots p_{n\;1}^{(n)};\; {}_1^{(n)} \quad {}_n^{(n)}}(v)$$

$${}^{(\;1\ldots \quad n\;1;\quad 1\ldots \quad n)}_{p_1^{(n)}\ldots p_{n\;1}^{(n)};\; {}_1^{(n)} \quad {}_n^{(n)}}(v,v)\; {}^{(b_1\ldots\, b_{m\;1};\, a_1\ldots\, a_m)}_{p_1^{(n)}\ldots p_{n\;1}^{(n)};\; {}_1^{(n)} \quad {}_n^{(n)}}(v,i)\}, \quad v, i \quad k\;;$$

$${}^{(b_1\ldots\, b_{m\;1};\, a_1\ldots\, a_m)}_{1\ldots \quad n\;1;\quad 1\ldots \quad n}(v,i)$$

$$\frac{1}{D_{\;1\ldots \quad n\;1;\quad 1\ldots \quad n}}\{M\,[Z^{\;\;n}(v \qquad {}_{n\;1})\ldots Z^{\;\;1}(v)\,X^{a_m}(i \quad b_{m\;1})\ldots X^{a_1}(i)]$$

$$M\,[Z^{a_n}(v \qquad {}_{n\;1})\ldots Z^{\;\;1}(v)]\,M\,[X^{a_m}(i \quad b_{m\;1})\ldots X^{a_1}(i)]$$

$$\sum_{\nu 1}^{L} \; \sum_{1 \; {}_{1}^{(1)} \; 1} D_{{}_{1}^{(1)}}(\;) \; {}_{{}_{1}^{(1)}}^{(\; 1)}(\;,\nu) \; {}_{{}_{1}^{(1)}}^{(b_1 \ldots b_{m \; 1}; a_1 \ldots a_m)}(\;, i) \quad \sum_{2 \; l \; 2}^{\nu \; 1 \; M(\;)} \; \sum_{p_1^{(l)} \; 1}^{p_1^{(l)}} \ldots \sum_{p_{l \; 1}^{(l)} \; p_{l \; 2}^{(l)} \; 1}^{p_{l \; 1}^{(l)}} \; \sum_{{}_{1}^{(l)} \; 1}^{{}_{1}^{(l)}} \ldots$$

$$\ldots \sum_{{}_{l}^{(l)} \; 1}^{{}_{l}^{(l)}} D_{p_1^{(l)} \ldots p_{l \; 1}^{(l)}; \; {}_{1}^{(l)} \; {}_{l}^{(l)}}(\;) \; {}_{p_1^{(l)} \ldots p_{l \; 1}^{(l)}; \; {}_{1}^{(l)} \; {}_{l}^{(l)}}^{(\; 1 \ldots \; n \; 1; \; 1 \ldots \; n)}(\;, \nu) \; {}_{p_1^{(l)} \ldots p_{l \; 1}^{(l)}; \; {}_{1}^{(l)} \; {}_{l}^{(l)}}^{(b_1 \ldots b_{m \; 1}; a_1 \ldots a_m)}(\;, i) \quad \sum_{l \; 2}^{n \; 1} \; \sum_{p_1^{(l)} \; 1}^{p_1^{(l)}} \ldots$$

$$\ldots \sum_{p_{l \; 1}^{(l)} \; p_{l \; 2}^{(l)} \; 1}^{p_{l \; 1}^{(l)}} \; \sum_{{}_{1}^{(l)} \; 1}^{{}_{1}^{(l)}} \ldots \sum_{{}_{l}^{(l)} \; 1}^{{}_{l}^{(l)}} D_{p_1^{(l)} \ldots p_{l \; 1}^{(l)}; \; {}_{1}^{(l)} \; {}_{l}^{(l)}}(\nu) \; {}_{p_1^{(l)} \ldots p_{l \; 1}^{(l)}; \; {}_{1}^{(l)} \; {}_{l}^{(l)}}^{(\; 1 \ldots \; n \; 1; \; 1 \ldots \; n)}(\nu, \nu)$$

$${}_{p_1^{(l)} \ldots p_{l \; 1}^{(l)}; \; {}_{1}^{(l)} \; {}_{l}^{(l)}}^{(b_1 \ldots b_{m \; 1}; a_1 \ldots a_m)}(\nu, i) \quad \sum_{p_1^{(n)} \; 1}^{p_1^{*(n)}} \ldots \sum_{p_{l \; 1}^{(n)} \; p_{l \; 2}^{(n)} \; 1}^{p_{n \; 1}^{*(n)}} \; \sum_{{}_{1}^{(n)} \; 1}^{{}_{1}^{*(n)}} \ldots$$

$$\ldots \sum_{{}_{n}^{(n)} \; 1}^{{}_{n}^{*(n)}} D_{p_1^{(n)} \ldots p_{n \; 1}^{(n)}; \; {}_{1}^{(n)} \; {}_{n}^{(n)}}(\nu) \; {}_{p_1^{(n)} \ldots p_{n \; 1}^{(n)}; \; {}_{1}^{(n)} \; {}_{n}^{(n)}}^{(\; 1 \ldots \; n \; 1; \; 1 \ldots \; n)}(\nu, \nu) \; {}_{p_1^{(n)} \ldots p_{n \; 1}^{(n)}; \; {}_{1}^{(n)} \; {}_{n}^{(n)}}^{(b_1 \ldots b_{m \; 1}; a_1 \ldots a_m)}(\nu, i)\},$$

$$\nu \quad k, \; i \quad b_{m \; 1} \quad k.$$

Каноническое разложение (4) точно описывает значения последовательности $\{X \;\}$ в исследуемом ряде точек t_i, $i \quad \overline{1, I}$, и обеспечивает минимум среднего квадрата приближения в промежутках между ними. В разложении (4) присутствует конечное число убывающих по абсолютному значению элементов, ограниченное числом точек дискретности и старшим порядком нелинейной связи. Поэтому классическая проблема моментов [10] для канонического представления (4) отсутствует. Единственным ограничением разложения (4) является конечность дисперсии случайной последовательности [7], что для реальных физических последовательностей, как правило, выполняется.

Предположим, что в результате измерения известно значение $z(1)$ последовательности $\{X \;\}$ в точке t_1 и, следовательно, известны значения коэффициентов $W_{{}_{1}^{(1)}}(1) \quad w_{{}_{1}^{(1)}}(1)$ и ${}_{1}^{(1)} \quad \overline{1, L}$. Тогда

$$w_{{}_{1}^{(1)}}(1) \quad z^{{}_{1}^{(1)}}(1) \quad M[Z^{{}_{1}^{(1)}}(1)] \quad \sum_{j \; 1}^{{}_{1}^{(1)} \; 1} {}_{j}^{(\; {}_{1}^{(1)})}(1,1) \, w_j(1).$$

Подстановка $w_1(1)$ в (4) позволяет получить каноническое разложение апостериорной случайной последовательности $X \; (i / z(1))$ в точках t_i, $i \quad \overline{k \;\; 1, I}$:

$$X(i / z(1)) \quad M[X(i)] \quad (z(1) \quad M[Z(1)]) \; {}_{1}^{(1)}(1, i)$$

$$\sideset{}{_{1}^{(1)}\,1}{}^{L}\; W_{\,{}_{1}^{(1)}}(1)\;\; {}^{(1)}_{{}_{1}^{(1)}}(1,i)\qquad {}^{i\qquad L}_{v\;2\;\;{}_{1}^{(1)}\;1}\; W_{\,{}_{1}^{(1)}}(v)\;\; {}^{(1)}_{{}_{1}^{(1)}}(v,i)$$

$$\begin{array}{l} i \quad M(v)\; p_1^{(l)} \qquad\quad p_{l\;1}^{(l)} \qquad\quad {}_{1}^{(l)} \qquad\quad {}_{l}^{(l)} \\ \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \quad W_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\;1}^{(l)};\;{}_{1}^{(l)}\quad{}_{l}^{(l)}}(v)\;\; {}^{(1)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\;1}^{(l)};\;{}_{1}^{(l)}\quad{}_{l}^{(l)}}(v,i), \\ v\;2\quad l\;2\;\; p_1^{(l)}\;1\quad p_{l\;1}^{(l)}\;\; p_{l\;2}^{(l)}\;1\;\;{}_{1}^{(l)}\;1\quad{}_{l}^{(l)}\;1 \end{array}$$

$$i \quad \overline{k \quad 1, I}. \tag{5}$$

В результате применения к (5) операции математического ожидания получаем оптимальную по критерию минимума среднего квадрата ошибки экстраполяции оценку будущих значений последовательности $\{X\}$ при условии, что для ее определения используется одно значение $z(1)$:

$$m_z^{(1;1)}(1,i) \quad M[X(i/z(1))] \quad M[X(i)] \;\; (z(1) \quad M[Z(1)]) \;\; {}_1^{(1)}(1,i). \tag{6}$$

Учитывая, что координатные функции ${}^{(b_1\ldots\, b_{m\;1};\,a_1\ldots\, a_m)}_{1\cdots\;\;n\;1;\;\;1\cdots\;\;n}(v,i)$ определяются из условия минимума среднего квадрата ошибки приближения в промежутках между произвольными значениями $Z^{\,n}(v \quad {}_{n\;1})\ldots Z^{\,1}(v)$ и $X^{a_m}(i \quad b_{m\;1})\ldots X^{a_1}(i)$, выражение (6) можно обобщить на случай прогнозирования $x^{a_m}(i \quad b_{m\;1})\ldots x^{a_1}(i)$:

$$m_{x/z}^{(1;1)}(b_1\ldots b_{m\;1}; a_1\ldots a_m, i) \quad M[X(i) \quad (z(1) \quad M[Z(1)] \;\; {}_1^{(b_1\ldots\, b_{m\;1};\, a_1\ldots\, a_m)}(1,i)\,. \tag{7}$$

В результате измерения $z(1)$ можно также определить значение w_2 $z^2(1) \quad (z(1) \quad M[Z(1)] \;\; {}_1^{(2)}(1,1)$ в разложении (5):

$$X(i/z(1), z^2(1)) \quad M[X(i)] \;\; (z(1) \quad M[Z(1)]) \;\; {}_1^{(1)}(1,i)$$

$$[z^2(1) \;\; (z(1) \quad M[Z(1)]) \;\; {}_1^{(2)}(1,1)] \;\; {}_1^{(1)}(1,i)$$

$$\sideset{}{_{1}^{(1)}\,3}{}^{L}\; W_{\,{}_{1}^{(1)}}(1)\;\; {}^{(1)}_{{}_{1}^{(1)}}(1,i)\qquad {}^{i\qquad L}_{v\;2\;\;{}_{1}^{(1)}\;1}\; W_{\,{}_{1}^{(1)}}(v)\;\; {}^{(1)}_{{}_{1}^{(1)}}(v,i)$$

$$\begin{array}{l} i \quad M(v)\; p_1^{(l)} \qquad\quad p_{l\;1}^{(l)} \qquad\quad {}_{1}^{(l)} \qquad\quad {}_{l}^{(l)} \\ \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \quad W_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\;1}^{(l)};\;{}_{1}^{(l)}\quad{}_{l}^{(l)}}(v)\;\; {}^{(1)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\;1}^{(l)};\;{}_{1}^{(l)}\quad{}_{l}^{(l)}}(v,i), \\ v\;2\quad l\;2\;\; p_1^{(l)}\;1\quad p_{l\;1}^{(l)}\;\; p_{l\;2}^{(l)}\;1\;\;{}_{1}^{(l)}\;1\quad{}_{l}^{(l)}\;1 \end{array}$$

$$i \quad \overline{k \quad 1, I}.$$

Применив операцию математического ожидания к апостериорной последовательности $X(i/z(1), z^2(1))$, с учетом выражения (7) получим алгоритм экстраполяции по двум значениям, $z(1), z^2(1)$:

$$m_{x/z}^{(2;1)}(b_1\ldots b_{m\;1}; a_1\ldots a_m, i)$$

$$m_z^{(1;1)}(b_1 \ldots b_{m\ 1}; a_1 \ldots a_m, i) \quad (z^2(1) \quad m_z^{(1;1)}(2,1)) \quad {}_2^{(b_1 \ldots b_{m\ 1}; a_1 \ldots a_m)}(1,i).$$

Обобщив найденную закономерность, запишем алгоритм прогноза для произвольного числа известных измерений:

$$m_x^{(\ 1 \ldots\ n\ 1;\ 1 \ldots\ n,\ v)}(b_1 \ldots b_{m\ 1}; a_1 \ldots a_m, i)$$

$$M[X^{a_m}(i \quad b_{m\ 1}) \ldots X^{a_1}(i)], v \quad 0,$$

$$m_z^{(\ 1 \ldots\ n\ 1;\ 1 \ldots\ n,\ v)}(b_1 \ldots b_{m\ 1}; a_1 \ldots a_m, i) \quad [z^{\ n}(v \qquad {}_{n\ 1}) \ldots z^{\ 1}(v)$$

$$m_z^{(\ {}^*_1 \ldots\ {}^*_{n\ 1};\ {}^*_1 \ldots\ {}^*_n,\ v)}(\ {}_1 \ldots\ {}_{n\ 1};\ {}_1 \ldots\ {}_n, v)] \quad {}^{(b_1 \ldots b_{m\ 1}; a_1 \ldots a_m)}_{\ 1 \ldots\ n\ 1;\ 1 \ldots\ n}(v,i),$$

если ${}^*_1 \ldots {}^*_{n\ 1};\ {}^*_1 \ldots {}^*_n \quad 0,$ (8)

$$m_z^{(p_1^{(n\ 1)} \ldots p_{n\ 2}^{(n\ 1)};\ {}_1^{(n\ 1)} \ldots\ {}_{n\ 1}^{(n\ 1)},\ v)}(b_1 \ldots b_{m\ 1}; a_1 \ldots a_m, i) \quad [z^{\ n}(v \qquad {}_{n\ 1}) \ldots z^{\ 1}(v)$$

$$m_z^{(p_1^{(n\ 1)} \ldots p_{n\ 2}^{(n\ 1)};\ {}_1^{(n\ 1)} \ldots\ {}_{n\ 1}^{(n\ 1)},\ v)}(\ {}_1 \ldots\ {}_{n\ 1};\ {}_1 \ldots\ {}_n, v)] \quad {}^{b_1 \ldots b_{m\ 1}; a_1 \ldots a_m}_{\ 1 \ldots\ n\ 1;\ 1 \ldots\ n}(v,i),$$

если ${}^*_1 \ldots {}^*_{n\ 1};\ {}^*_1 \ldots {}^*_n \quad 0.$

Выражение

$$m_x^{(\ 1 \ldots\ n\ 1;\ 1 \ldots\ n,\ v)}(b_1 \ldots b_{m\ 1}; a_1 \ldots a_m, i)$$

$$M[X^{a_m}(i \quad b_{m\ 1}) \ldots X^{a_1}(i) / z^{\ {}_1^{(1)}}(1), \ldots, z^{\ {}_1^{(1)}}(v),$$

где ${}_1^{(1)} \quad \overline{1,N};\ z^{\ {}_l^{(l)}}(j \quad p_{l\ 1}^{(l)}) \ldots z^{\ {}_1^{(1)}}(j),\ j \quad \overline{2, v\ \ 1},\ l \quad \overline{2, M(j)};\ z^{\ {}_l^{(l)}}(v \quad p_{l\ 1}^{l}) \ldots$ $\ldots z^{\ {}_1^{(1)}}(v),\ l \quad \overline{2, n\ \ 1};\ p_1^{(l)} \quad \overline{1, p_1^{(l)}}, \ldots, p_{l\ 1}^{(l)} \quad \overline{p_{l\ 2}^{(l)} \quad 1, p_{l\ 1}^{(l)}};\ {}_1^{(l)} \quad \overline{1,\ {}_1^{(l)}}, \ldots, {}_l^{(l)}$ $\overline{1,\ {}_l^{(l)}};\ z^{\ {}_n^{(n)}}(v \quad p_{n\ 1}^{(n)}) \ldots z^{\ {}_1^{(n)}}(v),\ p_1^{(n)} \quad \overline{1, p_1^{*(n)}}, \ldots, p_{n\ 1}^{(n)} \quad \overline{p_{n\ 2}^{(n)} \quad 1, p_{n\ 1}^{*(l)}};\ {}_1^{(n)}$ $\overline{1,\ {}_1^{*(n)}}, \ldots, {}_n^{(n)} \quad \overline{1,\ {}_n^{*(n)}};\ z^{\ n}(v \qquad {}_{n\ 1}) \ldots z^{\ 1}(v)]$ для ${}_1 \quad p_1^{(L)}, \ldots, {}_{L\ 1} \quad p_{L\ 1}^{(L)};$ ${}_1 \quad {}_1^{(L)}, \ldots, {}_L \quad {}_L^{(L)}$ и $m \quad 1, a_1 \quad 1$, является условным математическим ожиданием исследуемой случайной последовательности $X\,(i) \quad X(i)$, $i \quad \overline{k \quad 1, I}$, при условии, что в дискретном ряде точек t_j, $j \quad \overline{1, v}$, $v \quad k$, случайная последовательность принимает фиксированные значения $X\,(j) \quad z(j), j \quad \overline{1, v}, v \quad k$.

Средний квадрат погрешности экстраполяции алгоритмом (8) в момент времени t_i, $i \quad \overline{k \quad 1, I}$, для k известных измерений $z(j)$, $j \quad \overline{1,k}$, и L порядка нелинейности запишем в виде

$$E^{(L,k)}(i) \quad M\,[\{X(i) \quad M\,[X\,(i)]\}^2] \quad \sum_{v\ 1}^{k} \sum_{{}_1^{(1)}\ 1}^{L} D_{\ {}_1^{(1)}}(v)\{\ {}^{(1)}_{\ {}_1^{(1)}}(v,i)\}^2$$

$$k \quad M(v) \; p_1^{(l)} \quad p_{l\ 1}^{(l)} \quad {}_1^{(l)} \quad {}_l^{(l)} \quad \ldots \quad \ldots \quad D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ {}_1^{(l)}\ {}_l^{(l)}}(v)\{\ {}^{(1)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l\ 1}^{(l)};\ {}_1^{(l)}\ {}_l^{(l)}}(v,i)\}^2,$$
$$v\ 2 \quad l\ 2 \quad p_1^{(l)}\ 1 \quad p_{l\ 1}^{(l)} \; p_{l\ 2}^{(l)}\ 1 \quad {}_1^{(l)}\ 1 \quad {}_l^{(l)}\ 1$$
$$i \quad \overline{k\ \ 1, I}. \qquad (9)$$

При выборе значений k и L можно также анализировать величину относительного выигрыша в точности экстраполяции, последовательно увеличивая значения данных параметров:

$$^{(L\ \ 1,\,k)}(i) \quad \{E^{(L,\,k)}(i) \quad E^{(L\ \ 1,\,k)}(i)\} / M[\{X(i) \quad M[X(i)]\}^2],$$
$$^{(L,\,k\ \ 1)}(i) \quad \{E^{(L,\,k)}(i) \quad E^{(L,\,k\ \ 1)}(i)\} / M[\{X(i) \quad M[X(i)]\}^2].$$

В случае, когда случайная последовательность $\{X\}$ обладает только парными стохастическими связями $M[X^{\ 2}(i \quad p_1) X^{\ 1}(i)]$, алгоритм (8) упрощается к виду [11]

$$m_{x/z}^{(\ ,\,l)}(h,i) \quad \begin{matrix} m_{x/z}^{(\ ,\,l\ \ 1)}(h,i) \quad (z^h(\ ) \quad m_{x/z}^{(\ ,\,l\ \ 1)}(l,\ )) \ \ {}_h^l\ (i), l \quad 1, \\ m_{x/z}^{(\ ,\,L\ \ 1)}(h,i) \quad (z^h(\ ) \quad m_{x/z}^{(\ \ \ 1,\,L\ \ 1)}(l,\ )) \ \ {}_h^l\ (i), l \quad 1. \end{matrix} \qquad (10)$$

Выражение $m_{x/z}^{(\ ,\,l)}(h,i) \quad M[X^h(i)/z^v(j), j \quad \overline{1, \quad 1}, v \quad \overline{1,L}; z^v(\ ), v \quad \overline{1,l}\,]$ для $h \quad 1,\ l \quad L, \qquad k$ является несмещенной оптимальной оценкой $m_{x/z}^{(k,\,L)}(1,i)$ будущего значения $x(i),\ i \quad \overline{k\ \ 1, I}$, при условии, что для ее вычисления используются значения $z^v(j),\ v \quad \overline{1,L},\ j \quad \overline{1,k}$. Параметры алгоритма (10) определяем из следующих соотношений:

$$^{(\ )}_{hv}(i) \quad \frac{1}{D\ (v)} \quad M[Z\ (v) Z^h(i)] \quad \sum_{1\ \ j\ \ 1}^{v\ \ 1 \quad L} D_j(\ ) \quad {}^{(j)}(v) \quad {}_h^{(j)}(i)$$

$$\sum_{j\ \ 1} D_j(v) \quad {}_v^{(j)}(v) \quad {}_{hv}^{(j)}(i)\ , \qquad \overline{1,h},\ 1 \quad v \quad i \quad k;$$

$$^{(\ )}_{hv}(i) \quad \frac{1}{D\ (v)} \quad M[Z\ (v) X^h(i)] \quad \sum_{1\ \ j\ \ 1}^{v\ \ 1 \quad L} D_j(\ ) \quad {}^{(j)}(v) \quad {}_h^{(j)}(i)$$

$$\sum_{j\ \ 1} D_j(v) \quad {}_v^{(j)}(v) \quad {}_{hv}^{(j)}(i)\ , \qquad \overline{1,h},\ v \quad \overline{1,k},\ i \quad \overline{k\ \ 1};$$

$$^{(\ )}_{hv}(i) \quad \frac{1}{D\ (v)} \quad M[X\ (v) X^h(i)] \quad \sum_{1\ \ j\ \ 1}^{v\ \ 1 \quad L} D_j(\ ) \quad {}^{(j)}(v) \quad {}_h^{(j)}(i)$$

$$\underset{j\ 1}{} D_j(v)\ \ {}_{v}^{(j)}(v)\ \ {}_{hv}^{(j)}(i)\},\quad \overline{1,h}, k\quad v\quad i\quad I;$$

$$D\ (v)\quad M[Z^2\ (v)]\ \ \underset{1\ j\ 1}{\overset{v\ 1\quad L}{}}\ D_j(\ \ )\{\ \ {}^{(j)}(v)\}^2\quad \underset{j\ 1}{} D_j(v)\{\ \ {}_{v}^{(j)}(v)\}^2, v\quad \overline{1,k};$$

$$D\ (v)\quad M[X^2\ (v)]\ \ \underset{1\ j\ 1}{\overset{v\ 1\quad L}{}}\ D_j(\ \ )\{\ \ {}^{(j)}(v)\}^2\quad \underset{j\ 1}{} D_j(v)\{\ \ {}_{v}^{(j)}(v)\}^2, v\quad \overline{k\quad 1,I}. \tag{11}$$

Алгоритм (10) имеет эквивалентную явную форму записи:

$$m_{x/z}^{(k,\ N)}(1,i)\quad \underset{j\ 1\ v\ 1}{\overset{k\quad L}{}}\ z^v(j)\, S_{(j\ \ 1)N\ \ v}^{(kL)}((i\quad 1)L\quad 1),\ i\quad \overline{k\quad 1,I},$$

где

$$S_{(j\ \ 1)L\ \ v}^{(\ \ \ 1)}(\ \ )\ \ S_{(j\ \ 1)L\ \ v}^{(\ \ \ )}(\ \ )\ \ {}_{\mathrm{mod}_L(\ \ ),\,j}^{(v)}(i),\qquad 1\quad (j\quad 1)L\quad v;$$

$$S_{(j\ \ 1)L\ \ v}^{(\ )}(\ \ )\qquad {}_{\mathrm{mod}_L(\ \ ),\,j}^{(v)}([\ \ /L]\quad 1),\qquad (j\quad 1)L\quad v, \{\ \ /L\}\quad 0;$$

$$\qquad\qquad {}_{\mathrm{mod}_L(\ \ ),\,j}^{(v)}([\ \ /L]),\qquad (j\quad 1)L\quad v, \{\ \ /L\}\quad 0.$$

Средний квадрат погрешности экстраполяции алгоритмом (10), (11) определяется выражением:

$$M[\{X(i/z^v(j), v\quad \overline{1,L}, j\quad \overline{1,k})\quad m_x^{(k,\ L)}(1,i)\}^2]\quad M[X^2(i)]$$

$$\underset{j\ 1\ v\ 1}{\overset{k\quad L}{}}\ M[(W_j^{(v)})^2](\ \ {}_{1j}^{(v)}(i))^2,\ i\quad \overline{k\quad 1,I}.$$

Выводы

Таким образом, получен дискретный оптимальный в среднеквадратическом смысле алгоритм нелинейной экстраполяции зашумленной случайной последовательности. Универсальность полученного решения определяется тем, что каноническое разложение существует и точно описывает в точках дискретности любую случайную последовательность с конечной дисперсией. Алгоритм позволяет использовать стохастические связи произвольного порядка нелинейности и произвольное число результатов измерений. Поскольку вычисления параметров экстраполятора имеют рекуррентный характер, его реализация на ЭВМ достаточно проста.

On the basis of canonical decompositions the algorithm of optimum nonlinear extrapolation of a random sequence is obtained on condition that the measurings are carried out with an error.

1. *Колмогоров А. Н.* Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей. // Изв. АН СССР. Сер. Математическая. — 1941. — Т. 5, № 1. — С. 3—14.
2. *Винер Н.* Экстраполяция, интерполяция и сглаживание стационарных временных последовательностей с инженерными приложениями. — Нью-Йорк : Дж. Вилей, 1949. — 250 с.
3. *Ширяев А. Н.* Вероятность. — М. : Наука, 1980. — 576 с.
4. *Kalman R. E.* A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems// Trans. ASME. Series D. J. Basic Eng. — 1960. — Vol. 82. — P. 35—45.
5. *Справочник* по прикладной статистике. Т. 2.— М. : Финансы и статистика, 1990. — 526 с.
6. *Кудрицкий В. Д.* Фильтрация, экстраполяция и распознавание реализаций случайных функций. — К. : ФАДА, ЛТД, 2001. — 176 с.
7. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение. — М. : Физматгиз, 1962. — 720 с.
8. *Атаманюк И. П.* Алгоритм экстраполяции нелинейного случайного процесса на базе его канонического разложения // Кибернетика и системный анализ. — 2005.— № 2. — С. 131—138.
9. *Атаманюк И. П* Алгоритм реализации нелинейной случайной последовательности на базе ее канонического разложения // Электрон. моделирование. — 2001. — **23**, № 5. — С. 38—46.
10. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с ней. — М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. — 311 с.
11. *Атаманюк И. П.* Алгоритм определения оптимальных параметров полиномиального фильтра-экстраполятора Винера для нестационарных случайных процессов, наблюдаемых с погрешностями // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 2. — С. 154—159.

Поступила 30.05.11;
после доработки 19.03.12

АТАМАНЮК Игорь Петрович, канд. техн. наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики Николаевского государственного аграрного университета. В 1991 г. окончил Киевское высшее военное авиационное инженерное училище. Область научных исследований — распознавание, фильтрация, экстраполяция случайных процессов.

КОНДРАТЕНКО Юрий Пантелеевич, д-р техн. наук, профессор кафедры интеллектуальных информационных систем Черноморского государственного университета им. Петра Могилы. В 1976 г. окончил Николаевский кораблестроительный ин-т. Область научных исследований — теория принятия решений, теория систем управления, теория нечетких множеств и нечеткая логика.