ПРО ОДНУ C^*–АЛГЕБРУ ПОРОДЖЕНУ ТРІЙКАМИ ОРТОПРОЕКТОРІВ

Самойленко Є. Є. *Миколаївський державний аграрний університет*, *Україна*

Описання незвідних n-ок підпросторів (те ж саме, що n-ок ортопроекторів) при $n \geq 3$ без додаткових умов є $*$-дикою задачею, тобто “безнадійною” (див [1]).

Нехай H – гільбертовий простір, а H_i – такі підпростори цього простору, для яких задано сім’ю $\tilde{P}$ трійок проекторів ($P_i = P_i^2 = P_i^*$, $i = \overline{1,3}$) $P_i : H \to H_i$, зі співвідношеннями: $P_i P_j P_i = \tau^2 P_i$, $(i, j) \in \Lambda = (\{1,2,3\})^2 \setminus \{(1,3),(3,1)\}$ $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$, де $\tau \in \sigma \subseteq \left[0; \left(\sqrt{2}\right)^{-1}\right]$, $\tau = Cos\varphi$, φ – кут між підпросторами H_k і H_2, $k = 1,3$ відповідно. Виконання умови $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$ означає ортогональність підпросторів H_1 і H_3. Такі трійки ортопроекторів є зображенням в H $*$-алгебр (див. [2,3])

$$A_\tau \in C\left\langle p_1, p_2, p_3 \middle| \, p_i^2 = p_i^* = p_i, i = \overline{1,3}; p_i p_j p_i = \tau^2 p_i,\ (i, j) \in \Lambda; p_i p_j = p_j p_i = 0, (i, j) \notin \Lambda \right\rangle.$$

Твердження. Для A_τ з точністю до унітарної еквівалентності існують:

1) двовимірне зображення для $\tau = \left(\sqrt{2}\right)^{-1}$:

$$\pi(\tau): P_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \pi(\tau): P_2 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \pi(\tau): P_3 \to \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

2) сім’я незвідних трьохвимірних зображень:

$$\pi(\tau): P_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \pi(\tau): P_2 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \pi(\tau): P_3 \to \begin{pmatrix} \tau^2 & \tau^2 & \tau\sqrt{1-2\tau^2} \\ \tau^2 & \tau^2 & \tau\sqrt{1-2\tau^2} \\ \tau\sqrt{1-2\tau^2} & \tau\sqrt{1-2\tau^2} & 1-2\tau^2 \end{pmatrix}, \forall \tau \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

3) нульове зображення.

Теорема. C^*-алгебра ізометрично ізоморфна $\tilde{P}$ алгебрі неперервних матриць-функцій 3×3 заданих на множині Ω з додатковими обмеженнями (крайовими умовами): $\tilde{C} := \left\{ f = \left(f_{ij}(t)\right)_{i,j=1}^3 \in M_3(C(\Omega)) \middle| \, f_{11}, f_{22}, f_{33} \in C_1 := C(\Omega),\right.$

$$\left. f_{21}, f_{12} \in C_2 := \{f \mid f \in C(\Omega), f(0) = 0\},\quad f_{31}, f_{32}, f_{23}, f_{13} \in C_3 := \left\{ f \middle| f \in C(\Omega), f(0) = 0, f\left(\left(\sqrt{2}\right)^{-1}\right) = 0 \right\} \right\},$$

де $\sigma(S_\sigma(P_1, P_2, P_3))$ – спектр оператора $S_\sigma(P_1, P_2, P_3)$, а умови $f(0) = 0$, або $f\left(\left(\sqrt{2}\right)^{-1}\right) = 0$ мають сенс, якщо $\{0\}$ або $\left\{\left(\sqrt{2}\right)^{-1}\right\}$ належать Ω відповідно.

1. *Кругляк С.А., Самойленко Ю.С.* Об унитарной эквивалентности наборов самосопряженных операторов // Функцион. анализ и его прил. – 1980. – **14**, №1, – С. 60-62.
2. *Самойленко Ю.С., Стрелец А.В.* О простых n-ках подпространств гильбертова пространства.// Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, №12. – С. 1668–1706.
3. *Власенко М.А., Попова Н.Д.* О конфигурациях подпространств гильбертова пространства с фиксированными углами между ними.// Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, №5. – С. 606–615.