

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СОДЕРЖАЩЕЙ
ПУЗЫРЁК ГАЗА В ЖИДКОСТИ С УЧЁТОМ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ
ВОЗНИКАЮЩИХ В ЖИДКОСТИ

Aleksey Sheptilevskiy

Mykolayiv State Agrarian University, Ukraine
Krylova Street 17, Mykolayiv 54040, Ukraine

Анотация. В работе выполнено построение модели динамической системы, состоящей из сферической оболочки заданной толщины, жидкости и газового пузырька содержащегося в ней. Выполнено решение системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы.

Ключевые слова: газовый пузырьёк, динамическая система, волновое уравнение.

ВВЕДЕНИЕ

При изучении процессов, происходящих в жидкостях с пузырьками газа, приходится рассматривать ограниченные объёмы различной формы и величины. Задачи, связанные с поведением резервуаров сферической формы, подвергающихся различного рода нагрузкам, приложенным к внешней стенке резервуара, представляют большой практический интерес. Одной из возможных расчетных моделей в этом случае является тонкостенная сферическая оболочка, заполненная жидкостью, содержащей пузырьки газа.

В данной работе рассматриваются нестационарные колебания тонкостенной сферической оболочки заполненной жидкостью, содержащей пузырьки газа, под действием ударных нагрузок, внезапно прикладываемых к внешней поверхности оболочки.

При решении задач, связанных с рассмотрением ёмкостей на промышленных предприятиях, возникают определённые трудности при их решении связанных с получением экспериментальных данных. Данную проблему можно решить, используя математическое моделирование интересующих процессов.

Одной их форм кавитации является кавитация, возникающая при понижении давления в области распространения зародышей кавитации. Механизм её возникновения состоит в следующем: в жидкости постоянно присутствуют мельчайшие газовые пузырьки различных размеров – зародыши кавитации, при понижении давления в жидкости, если зародыши достаточно велики, и их кавитационная прочность меньше растягивающих напряжений, происходит рост

пузырька и превращение в кавитационную каверну, схлопывание которой вблизи оболочки приводит к кавитационной коррозии разрушающей оболочку.

ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Целью данной работы является изучение динамики газового пузырька в жидкости ограниченной сферической оболочкой заданной толщины, при изменении внешнего давления воздействующего на внешнюю поверхность сферической оболочки. Построить математическую модель сферической оболочки, заполненной жидкостью, и содержащей газовую полость.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

При построении модели будем рассматривать пузырёк газа, находящегося в сжимаемой жидкости, внутри сферической оболочки заданной толщины. Начальный радиус сферы равен R_{c_0} , радиус пузырька R , толщина оболочки δ . В начальный момент времени система находится в состоянии равновесия, давления в пузырьке, в жидкости и внешнее давление, одинаковое, и равно P_0 . В дальнейшем будем выводить систему из состояния равновесия, изменяя внешнее давление и отслеживать параметры рассматриваемой модели.

В наиболее простом случае предположим отсутствие проявления поверхностного натяжения и теплообмена, а также отсутствие вязких эффектов на границе раздела.

Составим математическую модель рассматриваемой системы, используя следующие уравнения:

1. Уравнение динамики сферической оболочки. Используя уравнение динамики упругого тела [1], с учётом центральной симметрии и малой толщины оболочки, по сравнению с её радиусом

$$\rho_2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = \frac{1}{R_c + \frac{\delta}{2}} \cdot \left[P_1 + P_2 - 2 \cdot E \cdot \frac{\bar{U}}{R_c + \frac{\delta}{2}} \right] - \frac{1}{\delta} (P_1 - P_2) \quad (1)$$

где: U - радиальное перемещение оболочки, ρ_2 - плотность материала, E - модуль Юнга, P_1 - внешнее давление, P_2 - давление в жидкости;

2. Уравнение Рэлея, описывающее динамику пузырька в жидкости

$$\rho_1 \cdot \left(R \cdot \ddot{R} + \frac{3}{2} \cdot \dot{R} \right) = P(R; t) - P_2, \quad (2)$$

где: ρ_1 - плотность жидкости, $P(R; t)$ - давление в пузырьке [2];

$$3. \text{ Волновое уравнение } \frac{\partial^2(\varphi \cdot r)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2(\varphi \cdot r)}{\partial r^2}, \quad (3)$$

где: φ - потенциал скорости, r - расстояние от центра сферы до рассматриваемой точки.

$$4. \text{ Уравнение изменения давления в пузырьке } P_3 = P_0 \cdot (R_0/R)^{3\gamma} \quad (4)$$

где: γ - показатель адиабаты, P_3 - давление в пузырьке.

Система уравнений (1) – (4) описывает поведение трёхфазной системы пузырёк – жидкость – оболочка, с учётом волновых процессов возникающих при выведении системы из состояния равновесия путём воздействия на внешнюю поверхность оболочки.

РЕШЕНИЕ ПОСТРОЕННОЙ МОДЕЛИ

Для решения полученной системы применим метод Рунге-Кутты, и схему «крест», для решения волнового уравнения.

Преобразовали систему уравнений 1,2,3,4 к безразмерному виду. В качестве основных масштабов переменных приняли T_0 - период собственных колебаний пузырька, R_0 - начальный радиус пузырька, P_0 - начальное давление системы, ρ_0 - начальная плотность жидкости. Тогда переменные будут иметь следующую связь с их безразмерными аналогами

$$U = R_0 \tilde{U}, R = R_0 \tilde{R}, \delta = R_0 \tilde{\delta}, R_s = R_0 \tilde{R}_s, t = T_0 \tilde{t}, P_1 = P_0 \tilde{P}_1, \quad (5)$$

$$P_2 = P_0 \tilde{P}_2, P_3 = P_0 \tilde{P}_3, \rho_1 = \rho_0 \tilde{\rho}_1, \rho_2 = \rho_0 \tilde{\rho}_2, E = P_0 \tilde{E}. \quad (6)$$

Подставив (5), (6) в уравнения получили систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho}_2 \cdot \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{t}^2} = Par1 \cdot \left(\frac{1}{\tilde{R}_c + \frac{\tilde{\delta}}{2}} \left[\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2 - \frac{2\tilde{E}\tilde{U}}{\tilde{R}_c + \frac{\tilde{\delta}}{2}} \right] - \frac{1}{\tilde{\delta}} (\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2) \right) \\ \tilde{\rho}_1 \cdot \left(\tilde{R} \frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial \tilde{t}^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{t}} \right)^2 \right) = Par1 \cdot (\tilde{P}_3 - \tilde{P}_2) \\ \tilde{P}_3 = \tilde{R}^{-3\gamma}, \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\text{где } Par1 = \frac{T_0^2 P_0}{\rho_0 R_0^2}, \quad (8)$$

$$Par2 = \frac{B}{P_0}. \quad (9)$$

Соотношения 8 и 9 представляют собой безразмерные комплексы которые можно использовать в качестве параметров подобия при моделировании исследуемых процессов.

Учитывая что $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, а $\omega_0 = \sqrt{\frac{3\mathcal{P}_0}{\rho_0 R_0^2}}$, подставили данные равенства в (8), получили:

$$Par1 = \frac{4\pi^2}{3\gamma}. \quad (10)$$

Система (7) содержит дифференциальные уравнения второго порядка. С помощью замен $\tilde{x} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{t}}$ и $\tilde{y} = \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{t}}$ преобразовали систему (7) к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}} = \frac{Par1}{\tilde{\rho}_2} \left(\frac{1}{\tilde{R}_c + \frac{\tilde{\delta}}{2}} \left[\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2 - \frac{2\tilde{E}\tilde{U}}{\tilde{R}_c + \frac{\tilde{\delta}}{2}} \right] - \frac{1}{\tilde{\delta}} (\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2) \right), \\ \dot{\tilde{U}} = \tilde{x}, \\ \dot{\tilde{y}} = \frac{Par1(\tilde{P}_3 - \tilde{P}_2)}{\tilde{R}\tilde{\rho}_1} - \frac{3\tilde{y}^2}{2\tilde{R}}, \\ \dot{\tilde{R}} = \tilde{y}. \end{array} \right. \quad (11)$$

Исследуемая система уравнений дополнена начальными условиями, при $\tilde{t} = 0$ имеем $\tilde{R} = 1$, $\tilde{P}_2 = 1$, $\tilde{y} = 0$, $\tilde{P}_3 = 1$, $\tilde{R}_{c_0} = 10$, $\tilde{U} = 0$, $\tilde{x} = 0$. Систему из состояния равновесия выводим, задав внешнее давление отличное от начального.

Волновое уравнение дополним краевыми условиями: левое граничное условие (условие для радиуса пузырька) $\frac{R_2 - R_1}{\Delta t} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta r}$, или

$$\varphi_1 = \varphi_2 - \frac{\Delta r}{\Delta t} (R_2 - R_1); \quad \text{правое граничное условие (условие для}$$

перемещения оболочки) $\frac{u_2 - u_1}{\Delta t} = \frac{\varphi_m^{n+1} - \varphi_{m-1}^{n+1}}{r}$. Из последнего равенства определяем потенциал скорости в крайней правой точке разбиения.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Систему из состояния равновесия выводим путём изменения внешнего давления, а именно рассмотрим распространение волны в жидкости при уменьшении внешнего давления рис1. При уменьшении внешнего давления происходит радиальное перемещение оболочки, увеличивается её радиус, при этом пренебрегаем изменением толщины оболочки, поскольку оно не значительно по сравнению с радиусом пузырька относительно которого проводили обезразмеривание линейных величин системы. Увеличение радиуса оболочки вызывает понижение давления в близи её внутренней поверхности, поскольку расстояние от оболочки до пузырька достаточно велико, изменение давления в жидкости происходит не мгновенно по всему объёму, а возникает волна разрежения направленная к центру сферы.

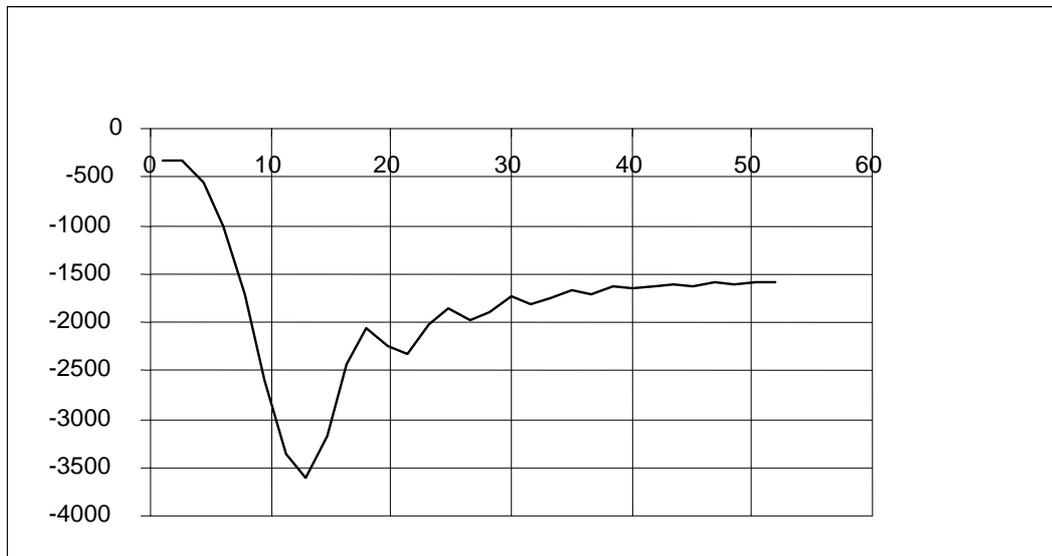


Рис.1. Давление в жидкости
Fig.1. Pressure in liquids

При приближении к поверхности пузырька волна разрежения увеличивает свою амплитуду, это связано с тем, что при приближении к центру уменьшается фронт волны, а потенциальная энергия изменяется не существенно (рис2).

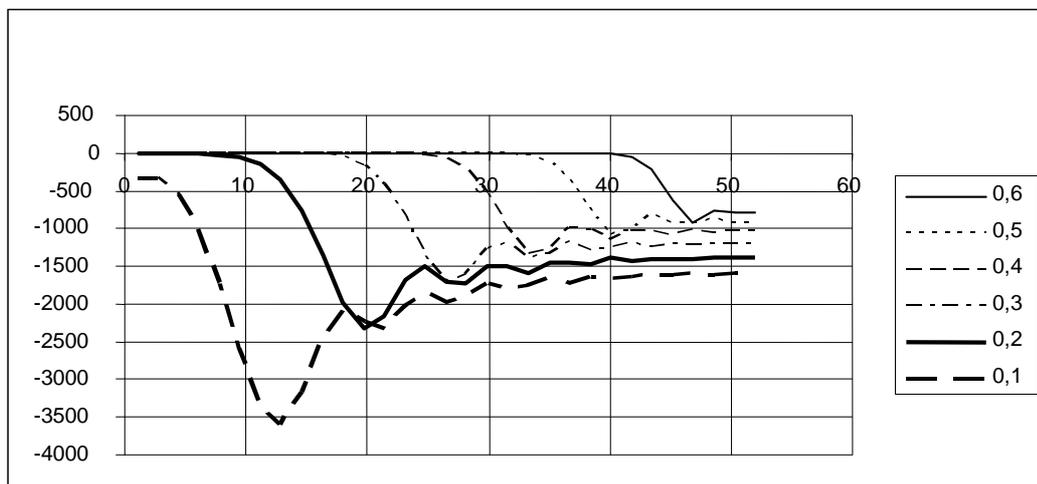


Рис2. Распространение волны давления в жидкости
Fig.2. Spreading the wave of the pressure in liquids

После того как волна приходит к поверхности пузырька, увеличивается его радиус, это приводит к увеличению давления жидкости расположенной вблизи поверхности пузырька. При этом возникает волна давления, которая распространяется от центра сферы к её поверхности. Достигая оболочки волна давления вызывает увеличение радиуса оболочки, внешнее давление при этом не изменяется, в следствии чего оболочка уменьшает свой радиус, при этом снова возникает волна давления распространяющаяся к центру сферы.

ВЫВОДЫ

В работе построена модель динамической системы, с помощью численных методов выполнено решение системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы. Составлена программа позволяющая проводить расчёты характеристик системы при различных начальных значениях параметров, от которых зависит система.

ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M.A.: Generalised theory of acoustic propagation in porous dissipative media. JASA, 1962, 34, №9, p. 1254-1264.
2. Diffey T.A., Johnson J.N.: Transient response of a pulsed spherical shell surrounded by an infinite elastic medium. Int. J. Mech. Sci., v. 23, №10, p. 589-593.
3. Богоявленский О.Н.: Новые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, вып. 1. с 3 – 9.
4. Григолюк Э.И., Горшков А.Г.: Нестационарная гидроупругость оболочек Л., Судостроение, 1974, 208 ст.
5. Гасенко В.Г., Донцов В.Е., Кузнецов В.В., Накоряков В.Е.: Осциллирующие уединённые волны в жидкости с пузырьками газа.// Изв. СО АН СССР. Сер. техн. Наук. 1987. Т 21, №6 С.43 – 45.
6. М.Н. Давыдов, В.К. Кедринский.: Двухфазные модели формирования кавитирующих отколов в жидкости.//ПМТФ. – 2003.-№5.-С.72-79.
7. Кедринский В.К. Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа// ПМТФ. 1968. №4. с. 29 – 34.
8. Лежнин С.И., Прибатурин Н.А., Сорокин А.Л.: Влияние вязкости на образование пузырьков при декомпрессии водонасыщенной магмы// ПМТФ. 2005. №1. С. 21 – 28.
9. Лойцянский Л.Г.: Механика жидкости и газа. М.:Наука 1973.
10. Накоряков В.Е., Донцов В.Е.: Затухание волн давления в жидкости с пузырьками двух сортов газа // Докл. РАН. 2002. Т. 382, №5. С. 637 – 640.
11. В.Е. Накоряков, Б.Г. Покусаев, И.Р. Шрейбер.: Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 248с.
12. Пирумов У.Г.. Численные методы. – М.: Дрофа, 2004. – 224с.

-
13. Шептилевский А.В., Косенков В.М.. Динамика газового пузырька в замкнутом сферическом объеме.//VI Международная школа-сименар «Импульсные процессы в механике сплошных сред». Николаев. 2005. с.98-99.

BUILDING TO MODELS OF THE SPHERICAL SHELL, CONTAINING
PHIAL OF THE GAS IN LIQUIDS PARTICIPATE OF THE PERTURB
PHENOMENA APPEARING IN LIQUIDS

Summary. In the work the dynamics of the system phial - compressed liquid in closed spherical volume under the periodic fluctuations of the external border was investigated.

Key words: the gas phial, dynamic system, wave equation.

Reviewer: Kosenkov V.M., Prof. Sc. D. Eng.